Microéconomie 1
Département d'économie ENS
2016 - 2017

Théorie du consommateur (2): **Résolution analytique de la demande**

Marianne Tenand
marianne.tenand@ens.fr

Questions fondamentales

- Nous avons vu comment résoudre graphiquement le problème de maximisation de l'utilité par le consommateur et en déduire la demande marshallienne
- **Objectif du cours :**
  - **Déterminer de manière analytique la demande**
    - Solutions intérieures et solutions en coin
    - Applications numériques
  - Caractériser certaines propriétés de la fonction de demande marshallienne
  - Déterminer les **relations entre demande hicksienne et demande marshallienne**

1. Résolution analytique du problème de maximisation de l'utilité sous contrainte

- **Def :** Soit une fonction d'utilité U, un ensemble des objets X, un vecteur de prix $p > 0$ et un niveau de revenu individuel $R_i > 0$. Le **programme de maximisation de l'utilité sous contrainte budgétaire** s'écrit :

$$\max_x U_i(x)$$

$$\text{s.c.} \qquad p.x \leq R_i \qquad \underline{\text{et}} \qquad x \geq 0$$

- On note $x_i(p,R_i)$ la **solution** d'un tel programme, et on définit $x_i(p,R)$ la **fonction de demande marshallienne** :

$$x_i\,(p,R) = \{\arg_{x \geq 0,\ x\ \text{Î}\ B(p,R)}\ [\max U_i(x)],\ p > 0,\ R \geq 0\}$$

1. Résolution analytique du problème de maximisation de l'utilité sous contrainte

- **Def :** Dans le cadre du problème précédent, on appelle **Lagrangien** la fonction, notée L(.), définie comme suit:

$$L(x,\lambda,\mu) = U(x) - \lambda(p.x - R) + \mu.x$$

Où λ et μ sont appelés les **multiplicateurs de Lagrange** associés respectivement aux contraintes:

$$p.x \leq R \text{ et } x \geq 0$$

- Intuition : le multiplicateur de Lagrange représente la **variation marginale** de la valeur atteinte par la fonction objectif U suite à un desserrement marginal de la contrainte auquel il est associé

- Il est parfois appelé **prix implicite de la contrainte**

1. Résolution analytique du problème de maximisation de l'utilité sous contrainte

- **Def :** Les **conditions de Kuhn et Tucker** associées au Lagrangien **L(x, λ, μ)** défini précédemment sont les suivantes :

1. $\partial L(x,\lambda,\mu)/\partial x = 0$

2. $\partial L(x,\lambda,\mu)/\partial \lambda \geq 0$

   et $\partial L(x,\lambda,\mu)/\partial \mu \geq 0$

3. $\lambda \geq 0$

   et $\mu \geq 0$

4. $\lambda(p.x - R) = 0$

   et $\mu.x = 0$

1. Résolution analytique du problème de maximisation de l'utilité sous contrainte

- On peut réécrire les conditions de Kuhn et Tucker ainsi :

1. $\partial L(x, \lambda, \mu)/\partial x = 0$ ⇔ $\boldsymbol{\partial U(x)/\partial x - \lambda p + \mu = 0}$
2. $\partial L(x, \lambda, \mu)/\partial \lambda \geq 0$ ⇔ $\boldsymbol{p.x \leq R}$ (contrainte n°1 = contrainte budgétaire)

   et $\partial L(x, \lambda, \mu)/\partial \mu \geq 0$ ⇔ $\boldsymbol{x \geq 0}$ (contraintes n°2 = contraintes de non-négativité)
3. $\boldsymbol{\lambda \geq 0}$

   et $\boldsymbol{\mu \geq 0}$
4. $\boldsymbol{\lambda(p.x - R) = 0}$

   et $\boldsymbol{\mu.x = 0}$

1. Résolution analytique du problème de maximisation de l'utilité sous contrainte

- **1er cas possible :**
  - <u>**1) Solutions intérieures**</u> : cas où $x > 0$; alors la condition [4] implique : $\boldsymbol{\mu = 0}$
    - <u>Rappel :</u> lorsque x est de dimension k, ie que $x=(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $x > 0 \Leftrightarrow$ pour tout $j = 1,\ldots, k$, $x_j > 0$
    - La condition [1] peut se réécrire :

$$\partial U(x)/\partial x = \lambda . p$$

→ Comme x et p sont des <u>vecteurs</u> de dimension (k,1) et λ est un <u>scalaire</u>, la condition [1] se réécrit comme :

pour tout $j = 1,\ldots, k$, $\partial U(x)/\partial x_j = \lambda p_j$

1. Résolution analytique du problème de maximisation de l'utilité sous contrainte

- **Solutions intérieures** : ex. avec cas d'un ensemble d'objets avec deux biens seulement, x_i et x_j.
  - La condition [1] s'écrit :

$$\partial U(x)/\partial x_i = \lambda p_i$$
$$\partial U(x)/\partial x_j = \lambda p_j$$

Donc :

$$[\ \partial U(x)/\partial x_i\ ]\ /\ p_i = \lambda = [\ \partial U(x)/\partial x_j\ ]\ /\ p_j$$

D'où :

$$TMS_{ij} = [\ \partial U(x)/\partial x_i\ ]\ /\ [\ \partial U(x)/\partial x_j\ ] = p_i/p_j$$

  - A l'optimum, le TMS entre les deux biens doit être égal au rapport de leurs prix
    - *Rings a bell?*

1. Résolution analytique du problème de maximisation de l'utilité sous contrainte

- **2ème cas possible :**
  - **2) Solutions en coins :** cas où pour un certain j, $\mathbf{x_j = 0}$;
    - si on suppose que pour tout $i \neq j$, $x_i > 0$, alors la condition [6] implique que tout $i \neq j$, $\boldsymbol{\mu_i = 0}$
    - en revanche on ne peut pas neutraliser μ_j
    - Rappel : μ est un vecteur de dimension (1,k)
    - La condition [1] s'écrit alors :

$$\partial U(x)/\partial x_j = \lambda p_j - \mu_j$$

et pour tout $i \neq j$, $\partial U(x)/\partial x_i = \lambda p_i$

→ Comme x et p sont des vecteurs de dimension (k,1) et λ est scalaire, la condition [1] implique que :

pour tout $i = 1,\dots, k$, avec $i \neq j$, $\partial U(x)/\partial x_i = \lambda p_i$

et $\partial U(x)/\partial x_j \leq \lambda p_j$ (car $\mu_j \geq 0$)

1. Résolution analytique du problème de maximisation de l'utilité sous contrainte

- **Solutions en coins** : ex. avec cas d'un espace d'objets avec deux biens seulement, x_1 et x_2, avec $x_1 = 0$.
  - La condition [1] s'écrit :

$$\partial U(x)/\partial x_2 = \lambda p_2$$

$$\partial U(x)/\partial x_1 = \lambda p_1 - \mu_1$$

  - Le TMS entre les 2 biens est alors telle que: $\mathbf{TMS_{12}}\,(x_1^*, x_2^*) < \mathbf{p_1/p_2}$
    - Dans le cas où on a $\mu_1 > 0$ (« vraie » solution en coin, et pas tangence de la courbe d'utilité à la droite de budget sur un des axes)
  - Ou encore :

$$[\ \partial U(x^*)/\partial x_1\ ] / p_1 < [\ \partial U(x^*)/\partial x_2\ ] / p_2$$

    - Interprétation : étant donnés les prix des biens, l'utilité marginale par euro dépensé pour le bien 1 est plus faible que l'utilité marginale par euro dépensé pour le bien 2, de sorte que le consommateur serait prêt à échanger davantage du bien 1 pour avoir davantage de bien 2… Mais il ne peut plus !

1. Résolution analytique du problème de maximisation de l'utilité sous contrainte

Signification du multiplicateur de Lagrange (solution intérieure)

- Pour un consommateur, le multiplicateur représente l'augmentation marginale de l'utilité induite par le relâchement de la contrainte budgétaire (par ex., une augmentation marginale du revenu)

- On peut le voir en définissant **V** la **fonction d'utilité indirecte**, qui pour tout vecteur de prix p et niveau de revenu R donne le niveau d'utilité donné par le panier optimal (compte tenu de p et de R) :

$$\mathbf{v(p,R) = U(x^*) = U(x(p,R))}$$

- Alors, en utilisant les CPO du problème de maximisation de l'utilité et la loi de Walras, on peut montrer que :

$$\mathbf{\partial v(p,R)/\partial R = \lambda}$$

- NB : dès lors que la loi de Walras n'est pas respectée (donc que U(.) n'est pas monotone), le desserrement de la contrainte budgétaire n'apporte aucun supplément d'utilité (puisque la contrainte n'était pas réellement contraignante, ou « binding »). Comme l'indiquent les conditions de Kuhn et Tucker, on est bien dans le cas où $\boldsymbol{\lambda = 0}$

1. Résolution analytique du problème de maximisation de l'utilité sous contrainte

- **Généralisation (1)**
  - **Cas d'une optimisation sous une contrainte d'égalité :**

$$\max U(x_1,\ldots,x_k) \qquad \text{s.c.} \qquad g(x_1,\ldots,x_k) = c$$

  - La contrainte peut être une contrainte budgétaire, une contrainte de temps, etc.
  - Le Lagrangien s'écrit $\mathbf{L(x, \lambda) = U(x) - \lambda(g(x) - c)}$

Conditions de premier ordre (CPO) :

1. Pour tout j = 1,…, k : $\partial L(x, \lambda)/\partial x_j = 0 \Leftrightarrow \partial U(x)/\partial x_j = \lambda\, \partial g(x)/\partial x_j$
2. $\partial L(x, \lambda)/\partial \lambda = 0 \Leftrightarrow g(x) = c$ (on retrouve la contrainte)

<u>Exemple :</u> Soit h le nombre d'heures travaillées par jour, l le nombre d'heures de loisirs, d le nombre d'heures de sommeil. On suppose une fonction d'utilité qui dépend de h, l et d: U = f(h,l,d). Alors le pb de maximisation peut s'écrire: Max U(h,l,d) s.c. h + l + d = 24

1. Résolution analytique du problème de maximisation de l'utilité sous contrainte

- **Généralisation (2)**
  - **Cas d'une optimisation sous m contraintes d'égalité :**

    $$\max U(x_1,\dots, x_k) \quad \text{s.c.} \quad g_i(x_1,\dots, x_k) = c_i \quad \text{pour } i = 1,\dots, m$$

  - Le Lagrangien s'écrit $L(x, \lambda) = U(x) - \sum_{i=1,\dots,m} \lambda_i \,(g_i(x) - c_i)$
  - λ_i est appelé le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte **i**

Conditions de premier ordre (CPO) :

1. Pour tout j = 1,…, k : $\partial L(x, \lambda)/\partial x_j = 0 \Leftrightarrow \partial U(x)/\partial x_j = \sum_{i=1,\dots,m} \lambda_i \, \partial g_i(x)/\partial x_j$
2. Pour tout i = 1,…, m : $\partial L(x, \lambda)/\partial \lambda_i = 0 \Leftrightarrow g_i(x) = c_i$ (on retrouve les *m* contraintes)

Exemple : Considérons le cas d'une vieille dame riche sans descendance qui doit décider de la transmission de sa fortune, notée F. Son utilité dépendra des sommes w, x, y et z versées à quatre fondations. Elle a juré à son défunt mari de léguer un tiers de leurs biens aux deux premières fondations. Comment s'écrit le problème de maximisation de Madame ?

1. Résolution analytique du problème de maximisation de l'utilité sous contrainte

- **Généralisation (3)**
  - **Cas d'une optimisation sous m contraintes d'inégalité :**

$$\max U(x_1,\dots, x_k) \quad \text{s.c.} \quad g_i(x_1,\dots, x_k) \leq c_i \quad \text{pour } i = 1,\dots, m$$

  - Comme précédemment, le Lagrangien s'écrit :

$$L(x, \lambda) = U(x) - \sum_{i=1,\dots,m} \lambda_i \,(g_i(x) - c_i)$$

Conditions de premier ordre (CPO) :

1. Pour tout j = 1,…, k : $\partial L(x, \lambda)/\partial x_j = 0 \Leftrightarrow \partial U(x)/\partial x_j = \sum_{i=1,\dots,m} \lambda_i \, \partial g_i(x)/\partial x_j$
2. Pour tout i = 1,…, m : $\partial L(x, \lambda)/\partial \lambda_i \geq 0 \Leftrightarrow g_i(x) \leq c_i$ (on retrouve les *m* contraintes)

<u>Exemple :</u> Soit un individu qui arbitre entre sa consommation c et son temps de loisir L (moins il passe de temps à travailler moins il a d'argent pour consommer). Chaque heure de travail est rémunérée à un salaire horaire net de 9 euros, et l'individu doit effectuer au minimum 7 h/jour. Sachant que la durée d'une journée est de 24h et qu'il a une fonction d'utilité U=U(c,L), comment s'écrit et se résout le pb d'optimisation de l'individu (sachant qu'il travaille) ?

1. Résolution analytique du problème de maximisation de l'utilité sous contrainte

- **Généralisation (4)**
  - Vous pouvez imaginer toutes les combinaisons possibles : m contraintes de non-négativité, n contraintes d'égalité, k contraintes d'inégalité, etc.
  - Vous devez être capable de **résoudre les différents types de problèmes d'optimisation**
  - Et au préalable, vous devez savoir **poser le problème** (!)
  - Pour vous aider :
    - Quelques slides de synthèse sur l'*Optimisation statique*
    - *Vademecum* sur l'optimisation sous contraintes écrit par Julien Grenet
    - Le cours de *Mathématiques pour économistes*

1. Résolution analytique du problème de maximisation de l'utilité sous contrainte

- **Exemple: une fonction d'utilité Cobb-Douglas**

En posant les conditions de K-T, déterminer la demande marshallienne associée aux préférences représentées par la fonction d'utilité suivante:

$$U(x_1,x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

Sachant que:
- Le consommateur ne peut consommer qu'une quantité positive ou nulle des deux biens
- Le revenu du consommateur est égal à 20
- Le prix du bien 1 est égal à 2 euros, et le prix du bien 2 à 3 euros

On suppose également que $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

La loi de Walras est-elle vérifiée ? La demande marshallienne est-elle homogène de degré 0 ?

2. Minimisation de la dépense et dualité

- **Le problème de minimisation de la dépense (PMD)**

  - C'est le problème symétrique de celui de la maximisation de l'utilité (PMU)
  - On parle de **dualité** du PMD et du PMU

  - **Def :** Etant donné une fonction U, un ensemble de consommation X, un vecteur de prix p > 0 et un niveau d'utilité $\overline{U}$ > U(0), le **problème de minimisation de la dépense sous contrainte d'utilité** s'écrit :

$$\mathbf{Min_x\ p.x}$$

$$\mathbf{s.c.} \qquad \mathbf{U(x) \geq \overline{U}} \qquad \underline{\mathbf{et}} \qquad \mathbf{x \geq 0}$$

2. Minimisation de la dépense et dualité

- **Def :** le **<u>Lagrangien</u>** associée au PMD est la fonction, notée L, définie comme suit :

$$\mathbf{L(x, \lambda, \mu) = - px + \lambda(U(x) – \bar{U}) + \mu.x}$$

Où λ et μ sont appelés les **<u>multiplicateurs de Lagrange</u>** associés respectivement aux contraintes :

$$U(x) \geq \bar{U} \text{ et } x \geq 0$$

- Les conditions de Kuhn et Tucker se posent de la même manière que pour le PMU
  - Rappel : <u>minimiser</u> une fonction f revient à <u>maximiser</u> la fonction (–f)

2. Minimisation de la dépense et dualité

- **Def :** On note h(p, $\overline{U}$) la solution d'un tel programme, où h(p, $\overline{U}$) est la **fonction de demande hicksienne**

$$h(p, \overline{U}) = \arg_{p > 0,\, x \geq 0,\, x \in \{x : U(x) \geq \bar{U}\}} [\min p.x]$$

- **Propriétés :** soit U une fonction d'utilité continue, représentant des préférences monotones. Alors pour tout p > 0, $\overline{U}$ > U(0), la fonction de demande hicksienne h(p, $\overline{U}$) a les propriétés suivantes:
  - h(p, $\overline{U}$) > 0
  - **Homogénéité de degré 0** en **p**
  - Pour tout x ϵ h(p, Ù), **U(x) = $\overline{U}$** (pas d'« excès » d'utilité)
  - Si les préférences sont **strictement convexes** alors h(p, $\overline{U}$) est constitué d'un **unique** élément pour p et $\overline{U}$ donnés

2. Minimisation de la dépense et dualité

- **Def :** La **fonction de dépense**, notée **e(p, $\bar{U}$)** est la grandeur **p.x***, où x* est une solution du programme de minimisation de la dépense (PMD)
  - Equivalent dans le PMU : la fonction d'utilité indirecte v(p,R)

  - Si les préférences sont monotones et continues, la fonction de dépense est :
    - **Homogène de degré 1** en **p**
    - **Strictement croissante** en $\bar{U}$
    - **Non-décroissante** en $\mathbf{p_j}$ pour tout j
    - **Concave** en **p**
    - **Continue** en **p** et en $\bar{U}$

2. Minimisation de la dépense et dualité

- **La dualité**
  - On peut montrer que, si U représente des préférences monotones et continues, on a les **propriétés** suivantes :
    - Si x* est solution au PMU (avec R > 0), alors x* est solution au PMD lorsque le niveau d'utilité à atteindre, $\overline{U}$, est U(x*)
      - De plus, le niveau de dépenses (minimum) atteint par le PMD est exactement égal à R : e(x*) = R
    - Si x* est solution au PMD (avec $\overline{U}$ > U(0)), alors x* est solution au PMU lorsque le revenu R est égal à p.x*
      - De plus, le niveau d'utilité (maximum) atteint découlant du PMU est exactement égal à $\overline{U}$: v(x*) = $\overline{U}$

Démonstration par l'absurde

2. Minimisation de la dépense et dualité

- **La dualité** implique plusieurs propriétés :

Si les préférences sont continues et monotones, alors :

- Pour les fonctions de **demande hicksienne et marshallienne** :
  - $h(p, \bar{U}) = x(p, \mathbf{e(p, \bar{U})})$ (→ fonction de demande *compensée*)
  - $x(p,\mathbf{R}) = h(p, \mathbf{v(p,R)})$

- Pour les fonctions de **dépense et d'utilité indirecte :**
  - $e(p, \mathbf{v(p,R)}) = \mathbf{R}$
  - $v(p, \mathbf{e(p, \bar{U})}) = \bar{U}$

2. Minimisation de la dépense et dualité

- **Relations entre demandes hicksienne et marshallienne**
  - **Propriétés :** Soit un niveau de revenu R > 0 et $\overline{U}$ > U(0)
    - Les fonctions de demande hicksienne et de demande marshallienne <u>ne se croisent qu'en un seul point</u>, le point x tq x(p,R) = h(p,$\overline{U}$) avec R = e(p, $\overline{U}$)
    - Lorsqu'on représente les fonctions de demande hicksienne et marshallienne dans le plan (p,x), la fonction de demande hicksienne est plus « pentue » que la fonction de demande marshallienne <u>lorsque x est un bien normal</u>
    - C'est l'inverse <u>lorsque x est un bien inférieur</u>
    - <u>**Loi de la demande compensée**</u> : On suppose que h(p, $\overline{U}$) est unique pour tout p > 0. Alors la fonction de demande hicksienne vérifie :

      Pour tout p', p'' > 0, **(p''-p').[h(p'', $\overline{U}$) – h(p', $\overline{U}$)] ≤ 0**

3. Propriétés et théorèmes importants

- **Identité de Roy**

  Pour tout j=1,…,k, $\mathbf{x_j(p,R) = - [\partial v(p,R)/\partial p_j]/[\partial v(p,R)/\partial R]}$

- **Lemme de Shepard**

  Pour tout j=1,…,k, $\mathbf{\partial e(p,u_0)/\partial p_j = h_j(p,u_0)}$

- **Equation de Slutsky**

  $$\partial x_i(p,R)/\partial p_j = [\partial h_i(p, u_0)/\partial p_j] - x_j(p,R)\,[\partial x_i(p,R)/\partial R]$$

  - Effet de substitution : toujours négatif
  - Effet-revenu : bien normal ou inférieur ?

→Bien normal : $\partial x_i(p,R)/\partial R > 0$, donc l'effet-revenu total ($- x_j(p,R)\,[\partial x_i(p,R)/\partial R]$) joue négativement (correspond à la perte de pouvoir d'achat lorsque le prix du bien j augmente, qui est d'autant plus grande que la quantité de bien j consommée est forte)