

TD7

Taxation optimale

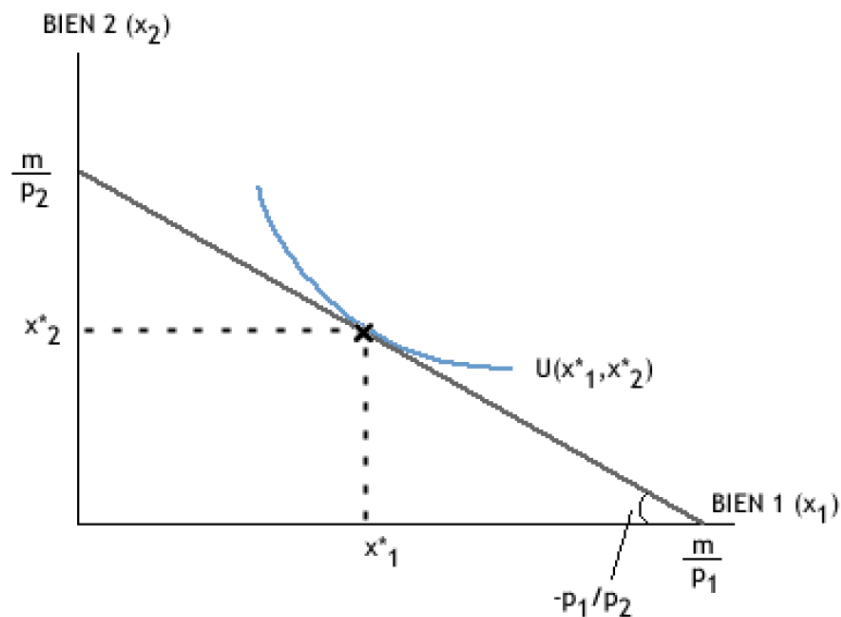
Correction**First Best : taxes sur les ventes *versus* impôt sur le revenu**

Pour prélever des recettes fiscales, on suppose que le gouvernement a le choix entre deux types d'instruments : une taxe différenciée sur les ventes (TVA avec différents taux par exemple) ou un impôt *forfaitaire* sur le revenu.

On souhaite déterminer lequel de ces deux instruments est le plus efficace économiquement. On considère pour cela un consommateur dont l'utilité dépend de la consommation de deux biens x_1 et x_2 et dont le revenu est noté m . On supposera que le consommateur dispose d'une fonction d'utilité $U(\cdot)$ deux fois différentiable et représentant des préférences convexes. Dans les questions qui suivent, on considèrera seulement les solutions intérieures aux PMU.

1. Représentez graphiquement le choix initial du consommateur, avant la mise en place de toute taxe. On note (x_1^*, x_2^*) le panier optimal du consommateur et u^* le niveau d'utilité associé à ce panier.

Figure 1: Choix initial



2. On suppose que le gouvernement décide maintenant de taxer les biens 1 et 2 au même taux t . Écrire le programme de maximisation du consommateur dans ce cas de figure (noté P) et écrire les CPO qui permettraient de déterminer le panier optimal (\bar{x}_1, \bar{x}_2) .

Solution : Le PMU du consommateur dans le cas d'une taxe uniforme est :

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & U(x_1, x_2) \\ \text{s.c.} \quad & p_1(1+t)x_1 + p_2(1+t)x_2 \leq m \end{aligned}$$

On fait l'hypothèse d'une solution intérieure ($x_1, x_2 > 0$) et que la contrainte budgétaire sera saturée à l'optimum (préférences monotones).

Le Lagrangien du PMU s'écrit :

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) - \lambda(p_1(1+t)x_1 + p_2(1+t)x_2 - m)$$

Les CPO sont les suivantes¹ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0 & \iff \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lambda p_1(1+t) \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0 & \iff \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \lambda p_2(1+t) \\ p_1(1+t)x_1 + p_2(1+t)x_2 = m \end{cases}$$

En divisant les deux premières CPO, on peut caractériser le panier choisi par le consommateur (\bar{x}_1, \bar{x}_2) :

$$\begin{cases} \frac{U'_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{U'_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} = \frac{(1+t)p_2}{(1+t)p_1} = \frac{p_2}{p_1} \\ p_1(1+t)\bar{x}_1 + p_2(1+t)\bar{x}_2 = m \end{cases}$$

On peut représenter ce panier optimal (Figure 2).

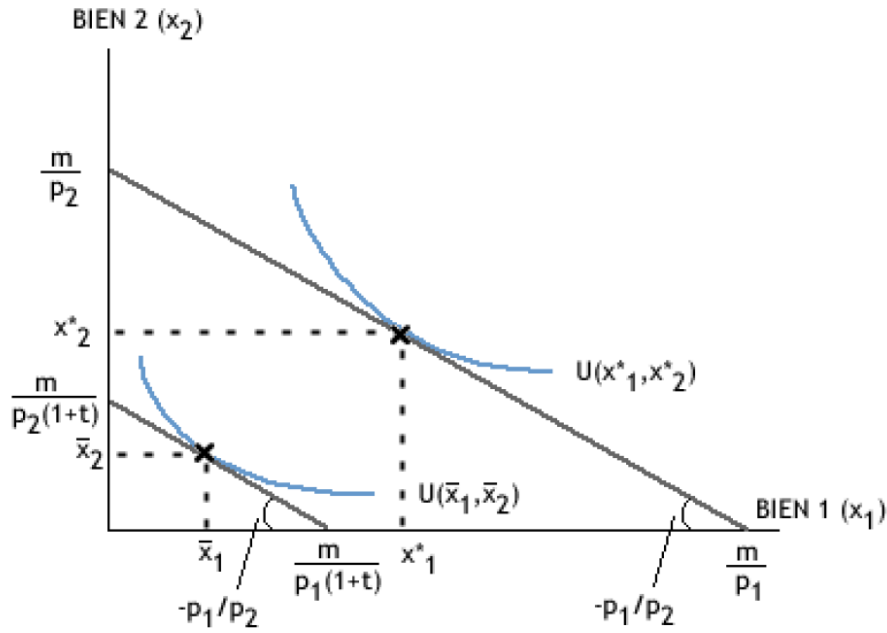
3. Montrer que le remplacement des taxes au taux t par un impôt forfaitaire sur le revenu égal à $t(p_1\bar{x}_1 + p_2\bar{x}_2)$ permet d'aboutir au même résultat que celui obtenu avec la taxe indirecte uniforme. On notera P' le programme d'optimisation du consommateur correspondant à ce nouveau cas de figure.

Solution : Le PMU se réécrit :

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & U(x_1, x_2) \\ \text{s.c.} \quad & p_1x_1 + p_2x_2 \leq m - t(p_1\bar{x}_1 + p_2\bar{x}_2) \end{aligned}$$

¹Dans les équations ci-dessous, ce sont les valeurs de x_1, x_2 et λ à l'optimum qui doivent respectées les conditions. Afin de ne pas introduire de confusion avec la notation choisie pour le panier optimal initial - sans taxation -, nous omettons les "*" signalant usuellement l'optimum.

Figure 2: Choix avec taxe uniforme



Le Lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m + t(p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2))$$

En dérivant les CPO (toujours en supposant une solution intérieure), on voit que la solution au PMU, (\hat{x}_1, \hat{x}_2) est caractérisée par :

$$\begin{cases} \frac{U'_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{U'_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2)} = \frac{p_2}{p_1} \\ p_1 \hat{x}_1 + p_2 \hat{x}_2 = m - t(p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2) \end{cases}$$

On remarque qu'on peut écrire la seconde CPO du PMU du consommateur (qui correspond à sa contrainte budgétaire) dans le cas d'une taxe uniforme comme la seconde CPO du PMU du consommateur dans le cas de l'impôt sur le revenu :

$$p_1(1+t)\bar{x}_1 + p_2(1+t)\bar{x}_2 = m \iff p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 = m - t(p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2)$$

La solution au PMU dans le cas d'une taxe uniforme est aussi solution au PMU dans le cas d'un impôt forfaitaire (dont le montant est égal au produit de la taxe uniforme). Dans le cas où le PMU admet une unique solution (préférences strictement convexes) alors les paniers (\bar{x}_1, \bar{x}_2) et (\hat{x}_1, \hat{x}_2) sont nécessairement égaux. Le consommateur pourra atteindre le même niveau d'utilité que le gouvernement décide de mettre en oeuvre une taxation uniforme des biens ou un impôt forfaitaire (sous condition que ce dernier soit précisément calibré).

4. On suppose maintenant que le gouvernement décide de taxer au taux t la consommation du bien 1, sans taxer la consommation du bien 2 (ni prélever d'impôt forfaitaire).

Écrire la contrainte budgétaire du consommateur.

On note (x'_1, x'_2) le panier optimal du consommateur après l'instauration de cette taxe. Représentez graphiquement l'impact de la mise en place de cette taxe sur le choix du consommateur. Comparer l'utilité u' associée à ce nouveau panier à l'utilité u^* .

Quel est le produit de la taxe ?

Solution : Dans ce dernier cas, le PMU se réécrit :

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & U(x_1, x_2) \\ \text{s.c.} \quad & p_1(1+t)x_1 + p_2x_2 \leq m \end{aligned}$$

Le Lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) - \lambda(p_1(1+t)x_1 + p_2x_2 - m)$$

Les CPO pour une solution intérieure s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0 \iff \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lambda p_1(1+t) \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0 \iff \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \lambda p_2 \\ p_1(1+t)x_1 + p_2x_2 = m \end{cases}$$

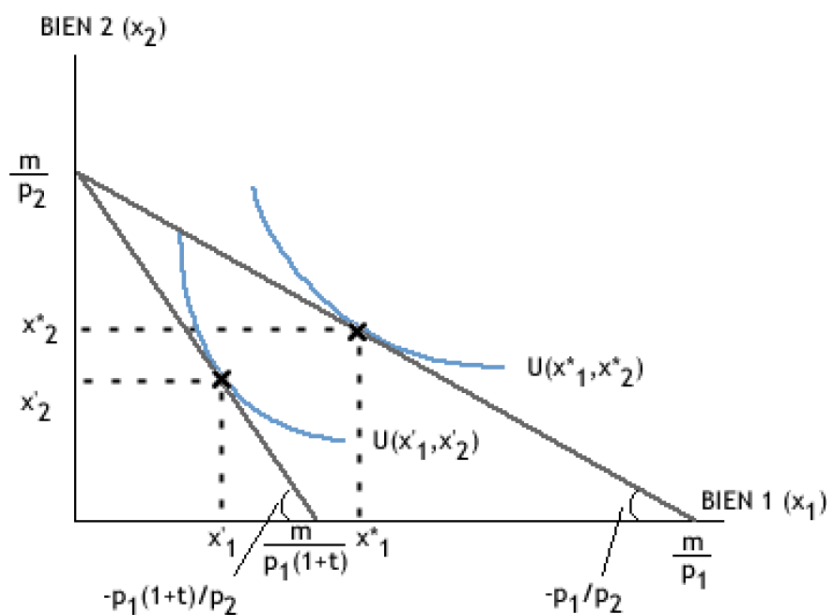
En notant (x'_1, x'_2) la solution (intérieure) :

$$\begin{cases} \frac{U'_2(x'_1, x'_2)}{U'_1(x'_1, x'_2)} = \frac{p_2}{p_1(1+t)} \\ p_1(1+t)x'_1 + p_2x'_2 = m \end{cases}$$

Une taxe asymétrique induit une distorsion dans les prix, qui modifie la pente de la contrainte budgétaire et pousse le consommateur à consommer moins de bien 1 par un double effet de substitution et de revenu, et moins de bien 2, par un effet de revenu (par rapport à la situation initiale sans taxation). Cf. Figure 4.

La taxe rapporte un produit $T = p_1x'_1$

Figure 3: Choix avec taxation d'un seul des biens



5. Le gouvernement renonce à cette taxe et décide de collecter la même somme à travers un impôt forfaitaire sur le revenu.

Comment s'écrit la contrainte budgétaire du consommateur ? Montrez que la droite de budget correspondante passe par le panier (x'_1, x'_2) .

Quel est à présent le panier (x''_1, x''_2) choisi par le consommateur en présence de ce nouvel impôt sur le revenu ? Comparez le niveau d'utilité associé u'' à l'utilité u' . Comment expliquez-vous l'écart observé ?

Solution : Le PMU dans ce nouveau cas de figure s'écrit avec la contrainte budgétaire suivante :

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m - t p_1 x'_1$$

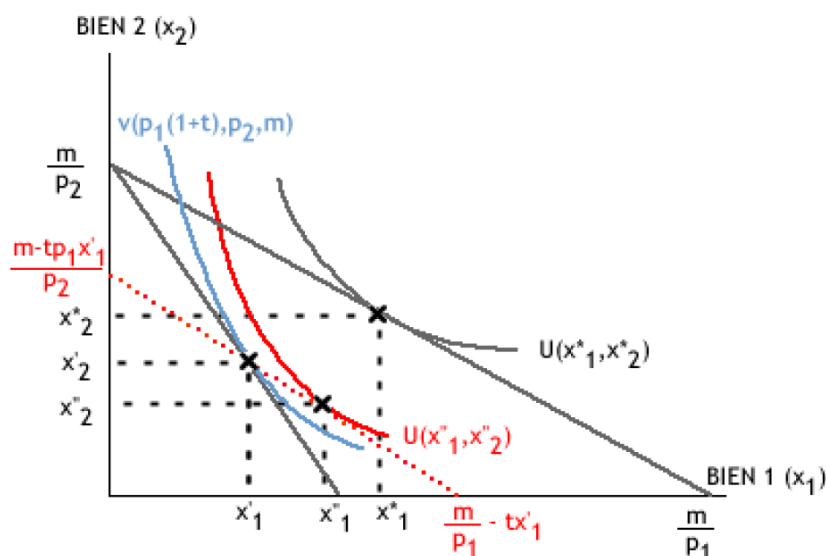
On remarquera que la droite budgétaire passe par le panier de consommation (x'_1, x'_2) (cf. la contrainte budgétaire associée au programme dont ce panier est la solution).

A l'optimum le panier de consommation choisi dans le cas de ce nouvel impôt, (x''_1, x''_2) , vérifie les CPO suivantes :

$$\begin{cases} \frac{U'_2(x''_1, x''_2)}{U'_1(x''_1, x''_2)} = \frac{p_2}{p_1} \\ p_1 x''_1 + p_2 x''_2 = m - t p_1 x'_1 \end{cases}$$

Le panier optimal (x''_1, x''_2) correspond au point de tangence entre la droite de pente $-p_1/p_2$ passant par le panier (x'_1, x'_2) et la courbe d'indifférence la plus élevée possible (cf. Figure 5).

Figure 4: Choix avec impôt forfaitaire (2)



On voit que dans ce cas de figure, la taxation indirecte des biens et l'impôt forfaitaire ne conduisent pas le consommateur à choisir le même panier de consommation, alors même que les recettes budgétaires sont les mêmes (égales à $T = p_1 t x_1'$). Le consommateur préfère l'imposition forfaitaire sur le revenu, puisqu'elle lui permet d'atteindre une utilité plus grande que la situation de taxation du bien 1.

On ne retrouve donc pas le résultat d'équivalence entre taxation indirecte et taxation forfaitaire du revenu obtenu avec une taxation uniforme des deux biens. En fait, la taxation du seul bien 1 crée une distorsion dans le prix relatif des biens, ce qui conduit le consommateur à choisir relativement plus de bien 2. Or l'accroissement relatif de la consommation du bien 2 conduit le consommateur à réduire la diversification de son panier de consommation (diversification optimale du fait de la convexité des préférences). Au contraire, la taxation directe du revenu n'induit pas de distorsion : le consommateur, même s'il est contraint à choisir un panier moins satisfaisant qu'en l'absence totale de taxes, pourra choisir le mélange optimal entre le bien 1 et le bien 2.

Second Best : taxation optimale des ventes et règle de Ramsey

Un impôt forfaitaire sur le revenu, bien que préférable à une taxe différenciée sur les ventes de biens sous les hypothèses classiques de la théorie du consommateur, n'est pas toujours réalisable. A quoi ressemble une *taxe optimale* lorsqu'on ne peut pas envisager de taxe forfaitaire ?

On étudie cette question dans le cadre d'une économie composée d'une seul consommateur supposé représentatif, doté d'un revenu m et dont l'utilité directe

est notée $U(x)$. Si chaque bien k , dont le prix hors taxe est p_k , est taxé au taux t_k , alors le vecteur de prix TTC auquel est confronté le consommateur peut s'écrire $\tilde{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$, où $\pi_k = (1 + t_k)p_k$ pour tout $k = 0, \dots, n$.

La fonction d'utilité indirecte du consommateur est alors donnée par $v(\tilde{\pi}, m)$, et la recette fiscale du gouvernement est égale à :

$$R(t_0, t_1, \dots, t_n) = \sum_{k=0}^n t_k p_k x_k(\tilde{\pi}, m)$$

où $x_k(\tilde{\pi}, m)$ désigne la demande marshallienne de bien k .

1. Le problème de la taxation optimale consiste à choisir le vecteur de taxe $\tilde{t} = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ qui maximise l'utilité indirecte et tel que le système fiscal rapporte à l'État une recette au moins égale à R_0 .

(a) Écrire le programme de maximisation correspondant au problème de la taxation optimale et le Lagrangien associé. On notera μ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte budgétaire de l'État.

Solution : Le programme de maximisation de l'utilité indirecte que doit résoudre le planificateur social s'écrit :

$$\begin{aligned} \max_{\tilde{t}} \quad & v(\tilde{\pi}, m) \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot x_k(\tilde{\pi}, m) \geq R_0 \quad \text{et} \quad \tilde{t} \geq 0 \end{aligned}$$

Pour pouvoir écrire le Lagrangien sans erreur de signe, on peut réécrire la contrainte de recettes fiscales de l'État :

$$\sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot x_k(\tilde{\pi}, m) \geq R_0 \iff - \sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot x_k(\tilde{\pi}, m) \leq -R_0$$

En se plaçant dans le cadre d'une solution intérieure, le Lagrangien de ce programme s'écrit :

$$\mathcal{L}(\tilde{t}, \mu) = v(\tilde{t}, m) - \mu \left[R_0 - \sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot x_k(\tilde{\pi}, m) \right]$$

(b) Montrez que les $n + 1$ premières conditions du premier ordre (dans le cas d'une solution intérieure) s'écrivent :

$$\frac{\partial v(\tilde{\pi}, m)}{\partial \pi_i} = -\mu \cdot \left[x_i(\tilde{\pi}, m) + \sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot \frac{\partial x_k(\tilde{\pi}, m)}{\partial \pi_i} \right] \quad \forall i = 0, \dots, n$$

Solution : Par hypothèse, il y a $n + 1$ biens, donc les $n + 1$ premières CPO sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\tilde{t}, \mu)}{\partial t_i} = 0 \quad \forall i = 0, \dots, n \iff \frac{\partial v(\tilde{\pi}, m)}{\partial t_i} + \mu \left[p_i x_i(\tilde{\pi}, m) + \sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot \frac{\partial x_k(\tilde{\pi}, m)}{\partial t_k} \right] = 0 \quad \forall i = 0, \dots, n$$

En utilisant la règle de dérivation en chaîne ($\tilde{\pi}$ est une fonction de \tilde{t}), on trouve que ces conditions peuvent se réécrire comme :

$$\frac{\partial v(\tilde{\pi}, m)}{\partial \pi_i} \frac{\partial \pi(t_i)}{\partial t_i} + \mu \left[p_i x_i(\tilde{\pi}, m) + \sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot \frac{\partial x_k(\tilde{\pi}, m)}{\partial \pi_i} \frac{\partial \pi_i(t_k)}{\partial t_i} \right] = 0 \quad \forall i = 0, \dots, n$$

En remarquant que $\frac{\partial \pi_i(t_i)}{\partial t_i} = \frac{\partial(1+t_i)p_i}{\partial t_i} = p_i$, on obtient finalement les $n + 1$ CPO suivantes :

$$\frac{\partial v(\tilde{\pi}, m)}{\partial \pi_i} p_i = -\mu \left[p_i x_i(\tilde{\pi}, m) + \sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot \frac{\partial x_k(\tilde{\pi}, m)}{\partial \pi_i} p_i \right] \quad \forall i = 0, \dots, n$$

et en simplifiant par $p_i > 0$ les deux membres de l'équation :

$$\frac{\partial v(\tilde{\pi}, m)}{\partial \pi_i} = -\mu \left[x_i(\tilde{\pi}, m) + \sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot \frac{\partial x_k(\tilde{\pi}, m)}{\partial \pi_i} \right] \quad \forall i = 0, \dots, n$$

- (c) **Utilisez l'identité de Roy pour montrer que l'équation précédente peut se réécrire :**

$$x_i(\tilde{\pi}, m) = \left[\frac{\mu}{\lambda - \mu} \right] \sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot \frac{\partial x_k(\tilde{\pi}, m)}{\partial \pi_i} \quad \forall i = 0, \dots, n$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte budgétaire du consommateur dans son programme de maximisation de l'utilité.

Indication : Rappelez-vous l'interprétation du multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte budgétaire dans le PMU. Il a quelque chose à voir avec la fonction d'utilité indirecte...

Solution : L'identité de Roy lie la demande marshallienne de bien i à la fonction d'utilité indirecte du consommateur :

$$x_i(\tilde{\pi}, m) = - \frac{\frac{\partial v(\tilde{\pi}, m)}{\partial \pi_i}}{\frac{\partial v(\tilde{\pi}, m)}{\partial m}}$$

Par ailleurs, le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte budgétaire dans le programme de maximisation de l'utilité du consommateur correspond au surcroît d'utilité pour le consommateur induit par un relâchement marginal de la contrainte budgétaire lorsqu'on a une solution intérieure. λ correspond donc à l'utilité marginale évaluée à l'optimum, et on peut donc l'écrire comme la dérivée

de la fonction d'utilité indirecte par rapport au revenu :

$$\lambda = \frac{\partial v(\tilde{\pi}, m)}{\partial m}$$

D'après l'identité de Roy, on en déduit :

$$\frac{\partial v(\tilde{\pi}, m)}{\partial \pi_i} = -\lambda \cdot x_i(\tilde{\pi}, m)$$

On peut alors réécrire l'équation obtenue à la question précédente :

$$-\lambda \cdot x_i(\tilde{\pi}, m) = -\mu \left[x_i(\tilde{\pi}, m) + \sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot \frac{\partial x_k(\tilde{\pi}, m)}{\partial \pi_i} \right] \quad \forall i = 0, \dots, n$$

En réarrangeant les termes, on obtient :

$$x_i(\tilde{\pi}, m) = \left[\frac{\mu}{\lambda - \mu} \right] \sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot \frac{\partial x_k(\tilde{\pi}, m)}{\partial \pi_i} \quad \forall i = 0, \dots, n$$

- (d) **En utilisant la relation de Slutsky et la symétrie de la matrice de Slutsky (cf. appendice), montrez que l'équation précédente peut se réécrire comme suit :**

$$-\theta \cdot x_i(\tilde{\pi}, m) = \sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} \quad \forall i = 0, \dots, n \quad (1)$$

où :

$$u = v(\tilde{\pi}, m)$$

et :

$$\theta = \left[\frac{\mu - \lambda}{\mu} - \sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot \frac{\partial x_k(\tilde{\pi}, m)}{\partial m} \right]$$

(θ est donc une grandeur qui ne dépend pas du bien i).

NB : Cette relation porte le nom de règle de Ramsey

Solution : D'après l'équation de Slutsky :

$$\frac{\partial x_j(\tilde{\pi}, m)}{\partial \pi_i} = \frac{\partial h_j(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_i} - x_i(\tilde{\pi}, m) \frac{\partial x_j(\tilde{\pi}, m)}{\partial m} \quad \forall i, j = 0, \dots, n$$

où $h_j(\tilde{\pi}, u)$ désigne la fonction de demande hicksienne associée au niveau d'utilité et $u = v(\tilde{\pi}, m)$. En remplaçant dans l'équation obtenue plus haut, on obtient :

$$x_i(\tilde{\pi}, m) = \left[\frac{\mu}{\lambda - \mu} \right] \sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot \left(\frac{\partial h_k(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_i} - x_i(\tilde{\pi}, m) \cdot \frac{\partial x_k(\tilde{\pi}, m)}{\partial m} \right) \quad \forall i = 0, \dots, n$$

On utilise à présent le fait que la matrice de Slutsky est symétrique :

$$\frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_j} = \frac{\partial h_j(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_i} \quad \forall i, j = 0, \dots, n$$

On peut dès lors réécrire l'équation précédente comme :

$$x_i(\tilde{\pi}, m) = \left[\frac{\mu}{\lambda - \mu} \right] \sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot \left(\frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} - x_i(\tilde{\pi}, m) \cdot \frac{\partial x_k(\tilde{\pi}, m)}{\partial m} \right) \quad \forall i = 0, \dots, n$$

En réarrangeant les termes :

$$\left[\sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot \frac{\partial x_k(\tilde{\pi}, m)}{\partial m} + \frac{\lambda - \mu}{\mu} \right] \cdot x_i(\tilde{\pi}, m) = \sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} \quad \forall i = 0, \dots, n$$

soit encore :

$$-\theta \cdot x_i(\tilde{\pi}, m) = \sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} \quad \forall i = 0, \dots, n$$

avec :

$$\theta = \frac{\mu - \lambda}{\mu} - \sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot \frac{\partial x_k(\tilde{\pi}, m)}{\partial m}$$

On peut montrer, en utilisant le fait que la matrice de Slutsky est semi-définie négative, que θ est du même signe que R_0 , donc positif ou nul.

Démonstration :

On part de l'équation établie précédemment, en multipliant chaque côté par $t_i \cdot p_i$:

$$-\theta \cdot t_i \cdot p_i \cdot x_i(\tilde{\pi}, m) = \sum_{k=0}^n t_i \cdot p_i \cdot t_k \cdot p_k \cdot \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} \quad \forall i = 0, \dots, n$$

On somme ensuite cette expression sur $i = 0, \dots, n$ pour obtenir :

$$-\theta \cdot \sum_{i=0}^n (t_i \cdot p_i \cdot x_i(\tilde{\pi}, m)) = \sum_{i=0}^n \left[\sum_{k=0}^n t_i \cdot p_i \cdot t_k \cdot p_k \cdot \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} \right]$$

On peut réécrire le terme de droite de l'équation comme :

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n t_i \cdot p_i \cdot \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} \cdot t_k \cdot p_k$$

Par ailleurs, par saturation de la contrainte budgétaire à l'optimum, on sait que

$$\sum_{i=0}^n (t_i \cdot p_i \cdot x_i(\tilde{\pi}, m)) = R_0$$

Donc

$$-\theta \cdot R_0 = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n t_i \cdot p_i \cdot \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} \cdot t_k \cdot p_k \quad (*)$$

On pose maintenant $B = (t_0.p_0, \dots, t_n.p_n)$. En utilisant la définition de la matrice de Slutsky, qu'on appellera S , on constate qu'on peut écrire le terme de droite de l'équation sous forme matricielle :

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n t_i.p_i \cdot \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} . t_k.p_k = B.S.B'$$

On peut donc réécrire l'équation (*) comme :

$$-\theta.R_0 = B.S.B'$$

Et donc :

$$\theta = -\frac{1}{R_0} B.S.B'$$

Comme la matrice de Slutsky S est semi-définie négative :

$$B.S.B' \leq 0$$

θ est donc du même signe que R_0 .

- (e) **On commence par supposer que tous les biens peuvent être taxés. Montrez que dans ce cas il est optimal de taxer tous les biens au même taux t (situation de "First Best" analysée dans la partie précédente dans le cas à deux biens).**

Indication : Pour cela, montrez que lorsque $t_i = t$ pour tout $i = 0, \dots, n$, alors le membre de droite de l'équation (1) est nul, ce qui implique que les conditions de premier ordre sont vérifiées. Pour arriver à ce résultat, on utilisera la relation d'Euler rappelée dans l'appendice.

Solution : Supposons que l'État puisse taxer tous les biens à un taux unique t . On peut donc écrire :

$$\sum_{k=0}^n t_k.p_k \cdot \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} = t \cdot \sum_{k=0}^n p_k \cdot \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} \quad \forall i = 0, \dots, n$$

Or la fonction de demande hicksienne est homogène de degré 0 : lorsqu'on multiplie l'ensemble des prix par la même constante, la demande reste inchangée. Ainsi :

$$\begin{aligned} h_i(\tilde{\pi}, u) &= h_i((1+t_0)p_0, \dots, (1+t_n)p_n, u) \\ &= h_i((1+t)p_0, \dots, (1+t)p_n, u) \\ &= (1+t)^0 . h_i(p_0, \dots, p_n, u) \\ &= h_i(p, u) \end{aligned}$$

On a donc :

$$t \cdot \sum_{k=0}^n p_k \cdot \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} = t \cdot \sum_{k=0}^n p_k \cdot \frac{\partial h_i(p, u)}{\partial \pi_k} \quad \forall i = 0, \dots, n$$

On peut maintenant utiliser la relation d'Euler, puisque la fonction de demande hicksienne est homogène de degré 0 (donc $h_i(\pi, u)$ également, et $h_i(\pi, u) = h_i(p, u)$) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_i(\pi, u)}{\partial \pi_k} \pi_k = 0 &\iff \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_i(p, u)}{\partial \pi_k} (1+t) p_k = 0 \\ &\iff (1+t) \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_i(p, u)}{\partial \pi_k} p_k = 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$t \cdot \sum_{k=0}^n p_k \cdot \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} = 0 \quad \forall i = 0, \dots, n$$

Dès lors, les $n + 1$ premières CPO sont vérifiées. La taxe uniforme constitue donc une solution au problème de collecte de recettes de l'État. Ce schéma de taxation correspond au "First Best", car il constitue ce qu'on peut faire de mieux du point de vue du consommateur (représentatif) sous la contrainte de revenus fiscaux de l'État.

- (f) **On suppose dorénavant qu'au moins un bien (le loisir par exemple, noté x_0) ne peut être taxé ($t_0 = 0$). Dans ce cas, le résultat précédent ne tient plus, et la taxation optimale ne consiste plus à taxer tous les biens autres que le loisir au même taux (on n'aura donc pas $(t_0, t_1, \dots, t_n) = (0, t, \dots, t)$. Dans cette situation, dite de "Second Best", on aimerait réécrire l'équation (1) sous une forme interprétable. Pour cela, on suppose qu'initialement tous les biens autres que le bien 0 sont taxés de manière optimale, à des taux très faibles (et donc $t_0 = 0$). On aimerait savoir ce qu'il se passerait si on supprimait brutalement toutes les taxes, c'est-à-dire si le prix de chaque bien passait de $p_i \cdot (1 + t_i)$ à p_i .**

En utilisant la formule de la différentielle totale, montrez que l'impact de cette suppression de taxes sur la demande hicksienne du bien i (impact qu'on notera dh_i) peut être approximé par la formule suivante :

$$dh_i(\tilde{\pi}, u) \approx - \sum_{k=0}^n t_k \cdot p_k \cdot \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} \quad \forall i = 0, \dots, n \quad (2)$$

Solution : On suppose que tous les biens autre que le bien 0 sont taxés à un taux optimal propre, $t_i > 0$. On peut écrire la demande hicksienne comme suit :

$$h_i(\tilde{\pi}, u) = h_i\left((p_0, p_1(1+t_1), \dots, p_n(1+t_n)), u\right)$$

On veut voir comment la demande hicksienne varie lorsqu'on supprime brutalement ces petites taxes, c'est-à-dire lorsque on passe de $p_i(1+t_i)$ à p_i . Il est possible d'approximer cette variation, notée h_i en utilisant la différentielle totale :

$$dh_i(\tilde{\pi}, u) \approx \sum_{k=0}^n \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} d\pi_k + \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial u} du$$

Pour le bien 0 il n'y a par hypothèse pas de taxe, donc pas de variation de prix lors de la suppression des taxes : $d\pi_0 = 0$. De plus, comme on s'intéresse à la demande hicksienne (aussi dite demande compensée), $du = 0$. Enfin, la variation de prix TTC pour le bien i $d\pi_i$ est simplement égale à :

$$d\pi_i = p_i - (1+t_i)p_i = -p_i \cdot t_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

En se rappelant que par hypothèse $t_0 = 0$, peut donc réécrire la variation de demande compensée du bien i comme :

$$\begin{aligned} dh_i &\approx \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} d\pi_k \\ &\approx - \sum_{k=1}^n p_k \cdot t_k \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} \\ &\approx - \sum_{k=0}^n p_k \cdot t_k \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} \end{aligned}$$

- (g) **En utilisant l'équation (2), l'équation (1) et en se rappelant que $x_i(\tilde{\pi}, m) = h_i(\tilde{\pi}, u)$, montrez que la taxation optimale des biens est telle que :**

$$\frac{dh_i(\tilde{\pi}, u)}{h_i} \approx \theta \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (3)$$

Interprétez cette expression.

Solution : En réutilisant le résultat de la question 1.(d) :

$$dh_i = \theta \cdot x_i(\tilde{\pi}, m)$$

Comme par ailleurs, du fait de la dualité, $x_i(\tilde{\pi}, m) = h_i(\tilde{\pi}, u) \quad \forall i = 1, \dots, n$ puisque $u = v(\tilde{\pi}, m)$, on obtient finalement :

$$\frac{dh_i(\tilde{\pi}, u)}{h_i(\tilde{\pi}, u)} \approx \theta \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Lorsqu'on ne peut pas taxer tous les biens au même taux, alors le schéma optimal de taxation est tel que la variation proportionnelle induite sur la demande (compensée) par la suppression simultanée de l'ensemble de des taxes soit la même pour tous les biens taxés (puisque θ ne dépend pas de i). Le taux de taxation d'un bien dépend donc de l'élasticité-prix de la demande pour ce bien.

- (h) Montrez que l'équation (1) peut se réécrire sous forme d'élasticité, comme suit :

$$-\theta = \sum_{k=0}^n \epsilon_{i,k} \cdot \tau_k \quad \forall i = 0, \dots, n \quad (4)$$

où $\epsilon_{i,k}$ désigne l'élasticité de la demande hicksienne de bien i par rapport au prix TTC π_k du bien k et $\tau_k = \frac{t_k}{1+t_k}$. Ce taux τ_k est en fait une transformation monotone croissante du taux de taxe t_k .

Solution : En utilisant le fait que $u = v(\tilde{\pi}, m)$ et que par dualité $x_i(\tilde{\pi}, m) = h_i(\tilde{\pi}, u)$, on peut réécrire l'équation (1) comme :

$$\begin{aligned} -\theta &= \sum_{k=0}^n \frac{t_k \cdot p_k}{x_i(\tilde{\pi}, m)} \cdot \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} \quad \forall i = 0, \dots, n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{t_k \cdot p_k}{h_i(\tilde{\pi}, u)} \cdot \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} \quad \forall i = 0, \dots, n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\pi_k}{h_i(\tilde{\pi}, u)} \cdot \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} \cdot \frac{t_k \cdot p_k}{\pi_k} \quad \forall i = 0, \dots, n \end{aligned}$$

L'élasticité-prix croisée de la demande hicksienne correspond à la variation proportionnelle dans la quantité demandée de bien i (hors effet de revenu) induite par une variation marginale dans le prix du bien k . Elle s'exprime donc :

$$\epsilon_{i,k} = \frac{\frac{dh_i(\tilde{\pi}, m)}{h_i(\tilde{\pi}, m)}}{\frac{d\tilde{\pi}_k}{\pi_k}} = \frac{\partial h_i(\tilde{\pi}, u)}{\partial \pi_k} \frac{\pi_k}{h_i(\tilde{\pi}, u)}$$

Ainsi :

$$-\theta = \sum_{k=0}^n \epsilon_{i,k} \frac{t_k \cdot p_k}{\pi_k} \quad \forall i = 0, \dots, n$$

Par ailleurs :

$$\frac{t_k \cdot p_k}{\pi_k} = \frac{t_k \cdot p_k}{(1+t_k) \cdot p_k} = \frac{t_k}{(1+t_k)} = \tau_k$$

Ainsi :

$$-\theta = \sum_{k=0}^n \epsilon_{i,k} \cdot \tau_k \quad \forall i = 0, \dots, n$$

- (i) Dans le cas extrême où $\epsilon_{i,k} = 0$ pour tout $k \neq i$ (la demande hicksienne du bien i ne dépend pas du prix TTC des autres biens), que devient cette relation ? Que nous dit-elle sur la manière optimale de fixer les taux de taxation t_k ? En quoi cette règle dite de l'élasticité-inverse est-elle conforme à l'intuition ?

L'application pratique de cette règle ne semble t'elle pas cependant soulever des problèmes d'équité ?

Solution : Dans ce cas particulier, la règle de taxation optimale est telle que :

$$-\theta = \sum_{k=0, k \neq i}^n \epsilon_{i,k} \cdot \tau_k + \epsilon_{i,i} \cdot \tau_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

et donc, puisque par hypothèse $\epsilon_{i,k} = 0 \quad \forall k \neq i$, :

$$-\theta = \epsilon_{i,i} \cdot \tau_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

On trouve bien :

$$\tau_i = -\frac{\theta}{\epsilon_{i,i}} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Dans ce cas, où les élasticités-prix croisées sont nulles (i-e la variation du prix d'un bien n'a aucun impact sur les quantités demandées des autres biens, hors effet-revenu), alors il faut taxer d'autant plus le bien i que son élasticité-prix est faible, c'est-à-dire que la demande pour ce bien est peu élastique au prix. Intuitivement, la taxation d'un bien très élastique va induire de fortes distorsions dans les choix de consommation, relativement au cas de la taxation uniforme. Afin de minimiser les distorsions et donc de maximiser l'utilité des consommateurs tout en atteignant le niveau de recettes fiscales cible, il faut donc taxer fortement les biens dont la consommation est peu sensible au prix.

Cette règle peut néanmoins poser des problèmes d'équité dans la mesure où les biens dont la demande est faiblement élastique sont définis comme des biens *nécessaires*. Or ces biens, parmi lesquels on trouve les biens d'alimentation, les énergies servant au chauffage, les transports, etc., sont aussi souvent des biens avec une élasticité-revenu faible (inférieure à 1). Dans ce cas, ils occupent une place plus importante dans le budget des ménages pauvres que dans le budget des ménages riches, et la taxation selon la règle de Ramsey est donc régressive au sens fiscale du terme.

Au-delà de la redistribution verticale, la taxation plus forte des biens dont la demande est la moins élastique peut induire des effets de redistribution horizontale, si les individus n'ont pas les mêmes préférences que l'agent représentatif (ainsi si on taxe fortement le chocolat aux fruits de la passion, pour lequel ma demande est très faiblement élastique contrairement à ce qui est le cas pour l'agent représentatif, je vais être plus fortement taxée que mes concitoyens moins friands de ce chocolat). La taxation optimale dans la situation de "Second Best" peut ainsi avoir des effets redistributifs indésirables. L'État devra donc arbitrer entre d'efficacité et ses objectifs d'équité.

Pour déterminer la solution reflétant le poids relatif accordé par le décideur public à ces deux paramètres, il faudrait complexifier le modèle en introduisant autant de consommateurs qu'on souhaite représenter de "classes" de citoyens, et définir une fonction de choix social qui attribue aux différentes classes des poids relatifs.

Appendice : quelques relations utiles

Matrice de Slutsky

Soit $h_i(p, u)$ la demande hicksienne (ou demande compensée) de bien i , étant donné un vecteur de prix des biens $p = (p_1, \dots, p_n)$ et un niveau d'utilité u . On appelle **matrice de Slutsky** (ou **matrice des effets de substitution** la matrice des dérivées partielles des demandes compensées des biens $1, 2, \dots, n$ par rapport aux prix p_1, \dots, p_n :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial p_1} & \frac{\partial h_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial p_1} & \frac{\partial h_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial p_1} & \frac{\partial h_n}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

On notera que cette matrice est carrée, de taille $n \times n$.

La convexité des préférences implique que cette matrice est **symétrique** ($\frac{\partial h_i}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j}{\partial p_i}$) et **semi-définie négative** (*définition ci-dessous*).

Matrice semi-définie négative

Soit A une matrice carrée de dimension $n \times n$ et de terme général $(a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$. Cette matrice est dite **semi-définie négative** si et seulement si pour tout vecteur-colonne x de dimension $1 \times n$ on a :

$$x' . A . x \leq 0$$

Pour rappel (règle du calcul matriciel) :

$$x' . A . x = \sum_i \sum_j x_i . x_j . a_{i,j}$$

Relation d'Euler

Soit f une fonction à n variables homogène de degré k (ce qui signifie que $f(tx_1, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, \dots, x_n)$). Alors cette fonction vérifie la propriété suivante :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} . x_i = k . f(x)$$