

TD6

Théorie du producteur - Minimisation du coût et maximisation du profit

Eléments de correction

1 Problème de minimisation du coût : une application numérique

Soit une firme dont la fonction de production est donnée par la fonction $f(x_1, x_2) = (3\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2$. Le prix de l'input 1 est de 1 €, le prix de l'input 2 est de 3 €. Quelle est la combinaison d'inputs la moins coûteuse pour produire 16 unités d'output ?

A quelle classe de fonctions, "classiques" en théories du consommateur et du producteur, appartient cette fonction de production ? Pouvez-vous en déduire la valeur de l'élasticité de substitution technique entre les deux facteurs de production ?

Eléments de réponse :

- La fonction de production étant strictement croissante en chacun des facteurs de production, à l'optimum il n'y aura pas de surplus de production par rapport à la cible de production y_0 : $f(x_1^*, x_2^*) = y_0$ (condition d'efficience).
- **Conditions de second ordre** : la **concavité de la fonction de production** assure que les vecteurs d'inputs respectant les conditions de première ordre sont solutions au problème de minimisation du coût (condition suffisante).
- La **stricte quasi-concavité** de la fonction de production implique l'unicité de la solution.
 - On peut donc se contenter de regarder le cas d'une solution intérieure, qui sera nécessairement une solution et la seule.
 - $f(\cdot)$ est strictement quasi-concave $\iff \forall y$, l'isoquante de niveau y est (monotone décroissante) strictement convexe dans le plan (x_1, x_2) \rightarrow on peut donc étudier les isoquantes (fonction à une variable) plutôt que la fonction de production.

– Alternativement, on peut regarder le $TMST_{1,2}(x_1, x_2)$: si $\forall (x_1, x_2), \frac{\partial TMST_{1,2}(x_1, x_2)}{\partial (x_2/x_1)} > 0$ ou $\frac{\partial TMST_{1,2}(x_1, x_2)}{\partial (x_1/x_2)} < 0$, cela signifie que l'isoquante est monotone décroissante et strictement convexe.

- On reconnaît une fonction de production de type CES (*Constant Elasticity of Substitution*). En effet, $f(\cdot)$ peut s'écrire :

$$f(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$$

avec $\rho = 1/2$. On peut montrer que l'élasticité de substitution technique σ , qui se définit comme :

$$\sigma(x_1, x_2) = \frac{d(x_1/x_2)}{(x_1/x_2)} \frac{TMST_{1,2}(x_1, x_2)}{dTMST_{1,2}(x_1, x_2)}$$

est, dans le cas d'une CES, constante et égale à :

$$\sigma = \frac{1}{1 - \rho}$$

Ici, $\sigma = 2$. Pour rappel, la Cobb-Douglas a une élasticité de substitution technique également constante, égale à 1 quelle que soit la valeur des paramètres α et β .

2 Problème de minimisation du coût : le cas de la Cobb-Douglas

On s'intéresse à une firme qui produit un output avec une technologie représentée par la fonction de production $F(x_1, x_2)$. La production se fait avec deux facteurs, x_1 et x_2 , dont les prix unitaires sont respectivement w_1 et w_2 .

La fonction de production est de type Cobb-Douglas : $F(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$. On suppose $\alpha, \beta > 0$, et $\alpha, \beta < 1$. *A priori*, $\beta \neq 1 - \alpha$.

Le PMC de la firme s'écrit :

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} & w_1 x_1 + w_2 x_2 \\ \text{s.c.} & y \geq F(x_1, x_2) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Comme $F(0, x_2) = 0 \quad \forall x_2$ et $F(x_1, 0) = 0 \quad \forall x_1$, on sait qu'à l'optimum chaque facteur sera demandé en quantité strictement positive (pas de solution en coin). Par ailleurs, la

contrainte associée au niveau de production à atteindre est saturée (condition d'efficience) dès lors que la production est croissante en chacun des facteurs des facteurs de production et que les facteurs de production ont un prix strictement positifs.

Le Lagrangien s'écrit donc :

$$L(x_1, x_2, \lambda) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \lambda(y - x_1^\alpha x_2^\beta)$$

Les CPO s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = 0 &\iff w_1 = \lambda^* \frac{\partial F(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} \iff w_1 = \lambda^* \alpha x_1^{*\alpha-1} x_2^{*\beta} \\ \frac{\partial L(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = 0 &\iff w_2 = \lambda^* \frac{\partial F(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \iff w_2 = \lambda^* \beta x_1^{*\alpha} x_2^{*(\beta-1)} \\ y = x_1^{*\alpha} x_2^{*\beta} &\iff x_1^* = y^{1/\alpha} x_2^{*(-\beta/\alpha)} \end{aligned}$$

Le $TMST_{1,2}(x_1^*, x_2^*)$, est égal au rapport des prix des facteurs à l'optimum.

A partir des 2 premières CPO, on obtient :

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha x_2^*}{\beta x_1^*}$$

et en utilisant la troisième CPO (condition d'efficience), on a :

$$\begin{aligned} \frac{w_1}{w_2} &= \frac{\alpha}{\beta} \frac{x_2^*}{y^{1/\alpha} x_2^{*(-\beta/\alpha)}} \\ x_2^{*(\frac{\alpha+\beta}{\alpha})} &= \frac{w_1 \beta}{w_2 \alpha} y^{1/\beta} \\ x_2^* &= \left[\frac{w_1 \beta}{w_2 \alpha} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \end{aligned}$$

On peut procéder de manière analogue ou utiliser la symétrie de la Cobb-Douglas pour en déduire x_1^* . La quantité d'input x_1 utilisée à l'optimum. Les demandes conditionnelles de facteurs sont donc :

$$\begin{aligned} x_1(w_1, w_2, y) &= \left[\frac{w_2 \alpha}{w_1 \beta} \right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\ x_2(w_1, w_2, y) &= \left[\frac{w_1 \beta}{w_2 \alpha} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \end{aligned}$$

La fonction de coût (à long terme) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} C(w_1, w_2, y) &= w_1 x_1(w_1, w_2, y) + w_2 x_2(w_1, w_2, y) \\ &= y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right] \end{aligned}$$

Le coût moyen est donné par :

$$\begin{aligned} CM(w_1, w_2, y) &= \frac{C(w_1, w_2, y)}{y} = y^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}} w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right] \\ &= y^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}} w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (\alpha + \beta) (\alpha^\alpha \beta^\beta)^{\frac{-1}{\alpha+\beta}} \end{aligned}$$

Le coût marginal est donné par :

$$\begin{aligned} cm(w_1, w_2, y) &= \frac{\partial C(w_1, w_2, y)}{\partial y} = \frac{1}{\alpha + \beta} y^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}} w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right] \\ &= y^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}} w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (\alpha + \beta) (\alpha^\alpha \beta^\beta)^{\frac{-1}{\alpha+\beta}} \end{aligned}$$

Remarquez que :

- Si $\alpha + \beta = 1 \iff \beta = 1 - \alpha$, alors : $CM(w_1, w_2, y) = \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{w_2}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$. Le CM est donc constant, quel que soit le niveau de production. Vous pouvez vérifier que le CM est égal au coût marginal, lui aussi constant.
- Si $\alpha + \beta > 1$, alors le CM est décroissant en le niveau de production. Le coût marginal est alors inférieur au CM.
- Si $\alpha + \beta < 1$, alors le CM est croissant en le niveau de production. Le coût marginal est alors supérieur au CM.

3 Problème de maximisation du profit : le cas de la Cobb-Douglas

Soit une firme dont la fonction de production est donnée par une fonction Cobb-Douglas à deux inputs : $f(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$, avec $\alpha, \beta > 0$. *A priori*, $\alpha + \beta \neq 1$. On note p le prix de l'output produit par la firme, et w_1 et w_2 les prix des facteurs de production.

1. La fonction de production est-elle homothétique ? Que pouvez-vous en déduire

pour le ratio des demandes conditionnelles d'inputs¹ ?

Réponse :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \left(x_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} x_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\right)^{\alpha+\beta} \\ &= g(x_1, x_2)^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

avec $g(\cdot)$ homogène de de degré 1, puisque $\forall \lambda > 1$:

$$\begin{aligned} g(\lambda x_1, \lambda x_2) &= \lambda^{\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)} \\ &= \lambda^1 g(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Par ailleurs, $x \rightarrow z^{\alpha+\beta}$ est une fonction monotone croissante. $f(\cdot)$ est donc homothétique.

L'homothétie d'une fonction de production est associée à certaines propriétés intéressantes pour la théorie du producteur. Par exemple, si on note $x_1(w_1, w_2, y)$ et $x_2(w_1, w_2, y)$ les demandes conditionnelles de facteurs (obtenues par le PMC), le ratio des demandes conditionnelles dépend des prix relatifs des facteurs, mais pas de l'échelle de production y :

$$\frac{x_1(w_1, w_2, y)}{x_2(w_1, w_2, y)} = \phi\left(\frac{w_1}{w_2}\right)$$

2. Résolvez le problème de maximisation du profit en donnant les fonctions de demande inconditionnelles d'inputs, $x_i(w_1, w_2, p)$ pour $i = 1, 2$. Distinguez les cas où la fonction de production exhibe des rendements d'échelle constants, décroissants ou croissants.

Attention : un problème d'optimisation n'admet pas nécessairement une solution.

Réponse : Quels que soient les rendements d'échelle, on peut écrire le PMP, le

¹Pour rappel, la fonction de demande conditionnelle d'un input est obtenue par la minimisation du coût sous contrainte d'un certain niveau de production cible. La maximisation du profit permet quant à elle d'obtenir les fonctions de demande inconditionnelles de facteurs. Par ailleurs, une fonction est homothétique si elle peut s'exprimer comme une transformation monotone croissante d'une fonction homogène de degré 1.

Lagrangien associé et les CPO de la manière suivante² :

$$\max_{x_1, x_2} \quad py - (w_1x_1 + w_2x_2) \quad s.c. \quad x_1, x_2 \geq 0, \quad \text{avec} \quad y = f(x_1, x_2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2) &= px_1^\alpha x_2^\beta - (w_1x_1 + w_2x_2) + \mu_1x_1 + \mu_2x_2 \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathcal{L}(x_1^*, x_2^*, \mu_1^*, \mu_2^*)}{\partial x_1} = 0 & \iff \alpha px_1^{\alpha-1} x_2^\beta = w_1 - \mu_1^* \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x_1^*, x_2^*, \mu_1^*, \mu_2^*)}{\partial x_2} = 0 & \iff \beta px_1^\alpha x_2^{\beta-1} = w_2 - \mu_2^* \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x_1^*, x_2^*, \mu_1^*, \mu_2^*)}{\partial \mu_i} \geq 0 & i = 1, 2 = 0 \iff x_i^* \geq 0 \quad i = 1, 2 = 0 \\ \mu_i^* x_i^* = 0 & i = 1, 2 = 0 \\ \mu_i^* \geq 0 & i = 1, 2 = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Cas 1 : rendements d'échelle décroissants

On se place dans le cas où $\alpha + \beta = 1$. Dans ce cas, $f(x_1, x_2)$ est strictement quasi-concave (vous pouvez le vérifier à partir des isoquantes ou du TMST). On aura une solution unique au problème de maximisation du profit.

Plaçons-nous dans l'hypothèse d'une solution en coin. Alors $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Des deux premières CPO, on déduit :

$$\frac{\alpha}{\beta} \frac{x_2}{x_1} = \frac{w_1}{w_2} \iff x_2 = \frac{\beta}{\alpha} \frac{w_1}{w_2} x_1$$

En reprenant la première CPO, on peut écrire :

$$\begin{aligned} x_1^{\alpha-1} &= \frac{w_1}{\alpha p} x_2^\beta \\ \iff x_1^{\alpha+\beta-1} &= w_1^{1-\beta} p^{-1} \alpha^{\beta-1} \left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{-\beta} \end{aligned}$$

et en simplifiant, on obtient la demande inconditionnelle de facteur 1 :

$$x_1(w_1, w_2, p) = \left(\frac{\alpha}{w_1}\right)^{\frac{1-\beta}{1-(\alpha+\beta)}} \left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}} p^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}}$$

et de manière symétrique :

$$x_2(w_1, w_2, p) = \left(\frac{\alpha}{w_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} \left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} p^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}}$$

²Pour simplifier les notations, les "*" indiquant usuellement qu'on s'intéresse aux valeurs des facteurs utilisés et des multiplicateurs de Lagrange à l'optimum sont omises.

NB : on peut remarquer qu'une solution en coin donne nécessairement un profit négatif ou nul (recettes nulles, coûts positifs ou nuls).

Cas 2 : rendements d'échelle constants

En reprenant les CPO pour les solutions intérieures avec $\beta = 1 - \alpha$, on obtient :

$$x_2 = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{w_1}{w_2} x_1$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \alpha p x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} = w_1 &\iff x_1^{\alpha-1} = \frac{w_1}{p\alpha} x_2^{\alpha-1} \\ &\iff x_1^{\alpha-1} = \frac{1}{p} \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{w_2}\right)^{\alpha-1} x_1^{\alpha-1} \end{aligned}$$

et donc, comme $x_1 \geq 0$ par hypothèse, on obtient la CPO suivante :

$$p = \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^\alpha \left(\frac{w_2}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$$

On voit que la CPO est maintenant indépendante de la quantité d'inputs : on ne peut donc formellement pas déterminer la quantité d'inputs qui va permettre de maximiser le profit !

On peut remarquer (cf. le PMC plus haut) que la CPO nous dit qu'à l'optimum, si on a une solution intérieure (i-e chaque facteur est utilisé en quantité strictement positive dans le processus de production), alors on doit avoir :

$$p = CM$$

Autrement dit, si le prix de vente de l'output (supposé exogène, indépendant de la décision individuelle de l'entreprise en concurrence pure et parfaite) est égal au coût moyen de production (qui est constant dans le cas d'une technologie à rendements d'échelle constants), alors la firme peut utiliser les facteurs de production en quantité non-nulle (et donc produira une quantité non-nulle).

Dans le cas où le prix de marché est égal au coût moyen de l'entreprise, le niveau de profit de la firme est en revanche indépendant de la quantité exacte d'inputs utilisés (et donc d'output produit) : dans tous les cas, le profit sera égal à $\Pi^* = py^* - CM y^* = (p - CM)y^* = 0$. Ainsi, utiliser les deux facteurs de production en

quantité nulle est également une solution au problème de maximisation du profit ; quelle que soit l'échelle de production choisie, le profit est nul. On peut remarquer que lorsque $\alpha + \beta = 1$, la fonction-objectif n'est plus strictement quasi-concave (l'unicité de la solution n'est donc pas assurée), ce qui est cohérent avec le fait qu'il existe une infinité de solutions au PMP.

Que se passe-t-il maintenant lorsque le prix de marché de l'output (fixé au niveau du marché de l'output) et le coût moyen de l'entreprise (déterminé par sa fonction de production) ne sont pas égaux ?

- Dans le cas où $CM > p$, pour tout niveau de production non nul, l'entreprise aura des recettes inférieures à ses coûts : $\Pi^* = (p - CM)y^* < 0$. Dans ce cas, l'entreprise maximisera son profit en ne produisant pas.
- Dans le cas où $CM < p$, le profit unitaire $\Pi^*/y = (p - CM)$ est positif, et le profit total est donc croissant en la quantité produite. L'entreprise peut théoriquement augmenter indéfiniment son profit en augmentant continuellement l'échelle de production. En pratique, il n'y aura dans ce cas pas de solution au PMP.

L'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left\{ (0, 0) \cup (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_0^+ \quad tq \quad x_2 = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{w_1}{w_2} x_1 \right\} & \text{si } p = \left(\frac{w_1}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{w_2}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \\ \{(0, 0)\} & \text{si } p < \left(\frac{w_1}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{w_2}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \\ \text{Pas de solution réelle} & \text{si } p > \left(\frac{w_1}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{w_2}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \end{array} \right.$$

Notez que dans le cas où prix de marché et coût moyen sont égaux, la quantité relative des inputs utilisés à l'optimum est entièrement déterminée par le paramètre α et par les rémunérations relatives des facteurs (supposées exogènes en concurrence pure et parfaite).

Cas 3 : rendements d'échelle croissants

On peut dériver les solutions intérieures respectant les CPO comme dans le cas où $\alpha + \beta < 1$. En revanche, on remarque que la fonction de production est *convexe* dans le cas où $\alpha + \beta > 1$: les CSO ne sont pas respectées, les CPO ne sont pas solutions au PMP.

Intuitivement, lorsqu'on est en présence de rendements d'échelle croissants, en augmentant les facteurs de production dans les mêmes proportions, on augmente

la production (et donc les recettes, si p reste constant quelle que soit l'échelle de production) relativement plus qu'on augmente les coûts. Tant que les rendements d'échelle sont croissants, augmenter l'échelle de production permet donc d'augmenter le profit. En pratique, il n'y a donc pas solution au PMP lorsque les rendements d'échelle sont croissants. Les fonctions de demande inconditionnelle de facteurs ne sont pas définies.

3. Déterminez la fonction d'offre, $y(w_1, w_2, p)$, là encore selon les rendements d'échelle.

Réponse : La fonction d'offre donne le niveau d'output qui permet à la firme de maximiser son profit. Elle se détermine en évaluant la fonction de production en les demandes inconditionnelles de facteurs.

$$y(w_1, x_2, p) = f(x_1(w_1, x_2, p), x_2(w_1, x_2, p))$$

Cas 1 : rendements d'échelle décroissants

On a :

$$\begin{aligned} y(w_1, x_2, p) &= x_1(w_1, w_2, p)^\alpha x_2(w_1, w_2, p)^\beta \\ &= p^{\frac{\alpha+\beta}{1-(\alpha+\beta)}} \left(\frac{\alpha}{w_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} \left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}} \end{aligned}$$

La fonction d'offre est croissante en p .

Cas 2 : rendements d'échelle constants

On doit distinguer les trois cas étudiés plus haut :

- Lorsque $CM > p$, on a tout simplement : $y(w_1, x_2, p) = 0$.
- Lorsque $CM = p$, on peut représenter la fonction d'offre dans le plan (y, p) comme la combinaison d'une droite horizontale d'équation $p = CM$ et du point $(0, 0)$ (puisque ne pas produire donne également un niveau de profit nul). L'entreprise est prête à produire n'importe quelle quantité y lorsque le prix de marché est égal au coût moyen.
- Lorsque $CM < p$, la fonction d'offre n'est pas définie puisque l'entreprise désire produire toujours davantage pour maximiser son profit.

Cas 3 : rendements d'échelle croissants

Dans ce cas, la fonction d'offre n'est pas définie puisque l'entreprise désire produire toujours davantage pour maximiser son profit.

4. Déterminez la fonction de profit, $\Pi(w_1, w_2, p)$, là encore selon les rendements d'échelle.

Réponse : La fonction de profit donne le profit maximal que l'entreprise peut réaliser compte tenu des prix des inputs et de l'output : $\Pi(w_1, w_2, p)$.

Cas 1 : rendements d'échelle décroissants

Les fonctions de demandes inconditionnelles de facteurs et d'offre étant définies, on a :

$$\begin{aligned}\Pi(w_1, w_2, p) &= py(w_1, w_2, p) - w_1 z_1(w_1, w_2, p) - w_2 z_2(w_1, w_2, p) \\ &= (1 - (\alpha + \beta)) p^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} \left(\frac{\alpha}{w_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} \left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}}\end{aligned}$$

Cas 2 : rendements d'échelle constants

On a $\Pi(w_1, w_2, p) = 0$ lorsque $p \leq CM$. Le profit maximal est indéfini dans le cas hypothétique où $CM < p^3$.

Cas 3 : rendements d'échelle croissants

Le profit maximal est indéfini.

³A l'échelle du marché de l'output, on considère en fait que cette situation n'est pas possible en situation de concurrence pure et parfaite : si la condition de libre entrée sur le marché de l'output est respectée, l'existence de profits strictement positifs sur le marché va y attirer de nouvelles firmes, qui vont augmenter la quantité offerte sur le marché et diminuer le prix. Le processus continuera jusqu'à ce que les profits sur le marché soit nuls.

5. Vérifiez le lemme d'Hotelling, i-e que :

$$\frac{\partial \Pi(w_1, w_2, p)}{\partial p} = y(w_1, w_2, p)$$
$$\frac{\partial \Pi(w_1, w_2, p)}{\partial w_i} = -x_i(w_1, w_2, p) \quad \text{pour } i = 1, 2$$

Réponse : La vérification se fait en dérivant la fonction de profit déterminée plus haut soit par rapport au prix de l'input soit par rapport au prix d'un input. Cette propriété n'a d'intérêt que dans le cas d'une fonction de production avec rendements d'échelle décroissants. Elle montre que le profit augmente lorsque le prix de l'output marginalement (et ce d'autant que l'échelle de production atteinte est importante), alors qu'il diminue lorsque le prix d'un input augmente marginalement (et ce d'autant que la quantité utilisée de ce facteur est importante).