Marianne Tenand
Microéconomie 1 (2016 - 2017) - Département d'économie ENS

TD 3 - Correction

Cours 2 : Maximisation de l'utilité et minimisation de la dépense

Exercice 1: problème de maximisation de l'utilité

Soit un consommateur disposant d'un revenu m et consommant deux biens, x et y, dont les prix sont $p_x = 5$ et $p_y = 3$. Les préférences du consommateur sont représentées par la fonction d'utilité suivante:

$$U(x, y) = (x + 2)(x + 3y)$$

On suppose que x et y ne peuvent être consommés qu'en quantité positive ou nulle.

1. Etudiez mathématiquement la forme des courbes d'indifférence de notre consommateur :

   (a) Les courbes d'indifférence sont-elles croissantes ou décroissantes dans le plan (x, y)? Que pouvez-vous en déduire sur le signe du $TMS_{x,y}$ (sans le calculer)?

   Réponse : La courbe d'indifférence de niveau $u_0 > 0$ correspond à l'ensemble des points (x, y) tels que $U(x, y) = u_0$. Pour tracer cette courbe d'indifférence dans le plan (x, y), on exprime y en fonction de x:

$$U(x, y) = u_0 \iff y = f(x) = \frac{1}{3}(\frac{u_0}{x + 2} - x)$$

   Pour déterminer si les courbes d'indifférence sont croissantes ou décroissantes, on étudie le signe de la dérivée première de f :

$$f'(x) = \frac{1}{3}(-\frac{u_0}{(x + 2)^2} - 1)$$

Les courbes d'indifférence sont donc décroissantes. La pente de la courbe d'indifférence en tout panier de consommation est donc de signe négatif : pour réduire la consommation d'un bien, il faut augmenter la consommation de l'autre si on veut maintenir le niveau d'utilité inchangé. Cela signifie que, pour tout panier de consommation (x,y), le $TMS_{x,y}(x,y)$ est positif[1]. C'est le cas le plus courant dans les problèmes de micro (x et y sont tous les deux des *biens*, aucun n'est un *mal*).

(b) Les préférences sont-elles convexes ?

Réponse : Les préférences sont convexes ssi $f'(x)$ est croissante, donc ssi $f''(x) \geq 0$. Or :

$$f''(x) = \frac{1}{3}\frac{2u_0(x+2)}{(x+2)^4} > 0 \quad \forall x \geq 0$$

Les préférences sont donc strictement convexes.

(c) Que se passe t'il quand $x = 0$? Et quand $y = 0$? Qu'en déduisez-vous pour la résolution du PMU ?

Réponse : On a $f(0) = \frac{u_0}{6} > 0$. Par ailleurs, $y = 0 \iff x^2 + 2x - u_0 = 0$. Pour résoudre cette équation, on calcule le discriminant du polynôme : $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-u_0) = 4(1+u_0) > 0$. Le polynôme admet donc deux racines réelles ; compte tenu du problème, c'est la racine positive qui nous intéresse :

$$x = -1 + \sqrt{u_0 + 1}$$

Ainsi les courbes d'indifférence coupent les axes, même avec $u_0 > 0$. On s'attend donc à rencontrer des *solutions en coin*.

2. Ecrire et résoudre le **programme de maximisation de l'utilité (PMU)** du consommateur de manière rigoureuse. Pour cela :

   (a) Ecrire le problème de maximisation en faisant apparaître les contraintes ; en déduire le Lagrangien associé. Vérifiez que votre nombre de contraintes est

[1] Rappelez-vous qu'on ajoute un signe "-" devant l'expression du TMS : $TMS_{x,y}(x,y) = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{U(x,y)=k}$.

bien égal au nombre de multiplicateurs de Lagrange.

Réponse : Le PMU s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & x^2 + 2x + 6y + 3xy \\ s.c. \quad & p_x x + p_y y \leq m \\ & x \geq 0 \quad \text{et} \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

avec $p_x = 5 \quad \text{et} \quad p_y = 3$.

On remarque que l'utilité est strictement croissante à la fois en x et en y ($U'_x(.) > 0$ et $U'_y(.) > 0$. Les préférences de l'agent sont donc monotones. A l'optimum, on sait donc que la contrainte budgétaire sera saturée.

Le Lagrangien s'écrit :

$$L(x, y, \lambda, \mu_x, \mu_y) = U(x, y) - \lambda(5x + 3y - m) + \mu_x x + \mu_y y$$

(b) Ecrire les conditions de Kuhn et Tucker (ou conditions de premier ordre) dans le cas général.

Réponse : Les conditions du premier ordre (CPO) s'écrivent:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L(x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial x} = 0 && \Longleftrightarrow U'_x(x^*, y^*) - 5\lambda^* + \mu_x^* = 0 && (1) \\
&\frac{\partial L(x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial y} = 0 && \Longleftrightarrow U'_y(x^*, y^*) - 3\lambda^* + \mu_y^* = 0 && (2) \\
&\frac{\partial L(x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial \lambda} \geq 0 && \Longleftrightarrow 5x^* + 3y^* \leq m && (3) \\
&\frac{\partial L(x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial \mu_x} \geq 0 && \Longleftrightarrow x^* \geq 0 && (4) \\
&\frac{\partial L(x^*, y^*, \lambda^*, \mu*)}{\partial \mu_y} \geq 0 && \Longleftrightarrow y^* \geq 0 && (5) \\
&\lambda^* \geq 0 && && (6) \\
&\mu_x^* \geq 0 \quad \text{et} \quad \mu_y^* \geq 0 && && (7)
\end{aligned}$$

(suite des CPO à la page suivante)

(début des CPO à la page précédente)

$$\lambda^*(5x^* + 3y^* - m) = 0 \quad (8)$$

$$\mu_x x^* = 0 \quad \text{et} \quad \mu_y y^* = 0 \quad (9)$$

(c) Distinguer les trois cas de figure possibles, selon qu'il y a ou non des solutions en coin, et pour chacun de ces cas, résoudre le PMU.

Réponse : Pour atteindre un niveau d'utilité strictement positif, le consommateur peut soit consommer des quantités positives de x et y, soit ne consommer que x, soit ne consommer que y. On distingue donc les trois cas suivants :

i. *Solution intérieure :* $x^* > 0$ et $y^* > 0$ ($\mu_x^* = 0$ et $\mu_y^* = 0$) On peut simplifier les CPO comme suit:

$$\frac{\partial L(x^*, y^*, \lambda^*, \mu*)}{\partial x} = 0 \iff U'_x(x^*, y^*) - 5\lambda^* = 0 \iff 2x^* + 3y^* + 2 - 5\lambda^* = 0$$

$$\frac{\partial L(x^*, y^*, \lambda^*, \mu*)}{\partial y} = 0 \iff U'_y(x^*, y^*) - 3\lambda^* = 0 \iff 3x^* + 6 - 3\lambda^* = 0$$

$$5x^* + 3y^* = m$$

$$\lambda^* \geq 0$$

$$\lambda^*(5x^* + 3y^* - m) = 0$$

On remarque que les deux premières CPO donnent le *principe d'égalisation marginale* :

$$\frac{U'_x(x^*, y^*)}{p_x} = \frac{U'_y(x^*, y^*)}{p_y} = \lambda^*$$

Le gain d'utilité par euro supplémentaire dépensé doit être égal pour tous les biens. A l'optimum, le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte budgétaire correspond au surcroit d'utilité qui peut être obtenu si le consommateur vient à disposer d'un euro supplémentaire (quel que soit le bien à la consommation duquel il décide d'affecter ce revenu additionnel). Le multiplicateur correspond bien à l'utilité marginale du revenu.

En reprenant les CPO, on obtient :

$$y^* = x^* + 24/9 \iff 3y^* = 3x^* + 8$$

et en utilisant le fait que la contrainte budgétaire est nécessairement saturée à l'optimum, on peut exprimer y en fonction de x et éliminer y de l'équation précédente :

$$3(m - 5x^*) = 3x^* + 8$$

On peut donc en déduire la consommation optimale des biens, exprimée en fonction du revenu :

$$x^*(m) = \frac{m}{8} - 1 \quad \text{et} \quad y^*(m) = \frac{m}{8} + \frac{5}{3}$$

Cette solution peut se rencontrer dans le cas où le revenu m est tel que :

$$\begin{cases} x^* > 0 \iff \dfrac{m}{8} - 1 > 0 \iff m > 8 \\ y^* > 0 \iff \dfrac{m}{8} + \dfrac{5}{3} > 0 \iff m > -\dfrac{40}{3} \end{cases}$$

ii. *Solution en coin n^o 1:* $x^* > 0$ et $y^* = 0$ ($\mu_x = 0$ et $\mu_y \geq 0$)

A partir de la contrainte budgétaire (saturée à l'optimum), on peut écrire :

$$y^* = 0 \quad \text{et} \quad x^* = \frac{m}{5}$$

On peut réécrire les CPO comme suit :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L(x^*, y^*, \lambda^*, \mu*)}{\partial x} = 0 && \iff 2x^* + 2 - 5\lambda^* = 0 \\
&\frac{\partial L(x^*, y^*, \lambda^*, \mu*)}{\partial y} = 0 && \iff 3x^* + 6 - 3\lambda^* + \mu_y = 0 \\
&5x^* + 3y^* = m \\
&\lambda^* \geq 0 \\
&\mu_x = 0 \quad \text{et} \quad \mu_y \geq 0 \\
&\lambda^*(5x^* + 3y^* - m) = 0
\end{aligned}$$

On peut dériver une expression pour λ^* à partir de la première condition :

$$\lambda^* = \frac{2}{5}(x^* + 1)$$

On peut réécrire la seconde condition :

$$3(x^* + 2) - 3\lambda^* = -\mu_y$$

donc en utilisant le fait que $\mu_y \geq 0$ et l'expression de λ^*:

$$3(\frac{m}{5} + 2) - 3\frac{2}{5}(\frac{m}{5} + 1) \leq 0$$

En simplifiant, on obtient une condition caractérisant cette première solution en coin :

$$m \leq -\frac{40}{3}$$

Ce résultat paraît assez étrange : il faudrait que le revenu soit suffisamment *négatif* pour arriver à avoir une solution en coin de ce type. En fait, en reprenant la condition $3(x^* + 2) - 3\lambda^* = -\mu_y$, et en reprenant l'expression de λ^* dérivée plus-haut ($\lambda^* = \frac{2}{5}(x^* + 1)$), on trouve que :

$$\frac{9}{5}x + \frac{4}{5} = -\mu_y$$

Or on sait par les CPO que $\mu_y^* \geq 0$; d'autre part, dès lors que $x \geq 0$, la partie de gauche de cette expression est strictement positive. On a donc une contradiction : cette solution en coin où $y^* = 0$ n'est en fait pas possible. Ceci est dû au fait que le rapport des prix est trop "fort" relativement aux valeurs que prend le TMS quand x croît et que y se rapproche de 0 (les courbes d'indifférence sont trop "plates" quand x devient grand, au regard du rapport des prix). Pour avoir une solution en coin, il faudrait en effet que le $TMS_{x,y}(x,y) = \frac{U'_x}{U'_y} > \frac{5}{3}$ quand y tend vers 0.

iii. *Solution en coin n° 2 :* $x^* = 0$ et $y^* > 0$ ($\mu_y^* = 0$ et $\mu_x^* \geq 0$)

A partir de la contrainte budgétaire, on peut écrire :

$$x^* = 0 \quad \text{et} \quad y^* = \frac{m}{3}$$

On procède de manière similaire que précédemment. On trouve que la condition qui caractérise cette solution en coin est :

$$m \leq 8$$

Contrairement à la solution en coin précédente, celle-ci est tout à fait possible, dès lors que le revenu est suffisamment *faible*.

(d) A partir des conditions de premier ordre, discuter de la valeur des demandes (pseudo)marshalliennes[2] $x^* = x(m)$ et $y^* = y(m)$ en fonction de la valeur du revenu m.

Réponse : D'après la question (c), on peut écrire les demandes (pseudo)marshalliennes ainsi :

$$\begin{cases} x(m) = \frac{m}{8} - 1 & \text{et} \quad y(m) = \frac{m}{8} + \frac{5}{3} & \text{si } m > 8 \\ x(m) = 0 & \text{et} \quad y(m) = \frac{m}{3} & \text{si } m \leq 8 \end{cases}$$

3. Si on vous avait donné directement la fonction d'utilité indirecte associée au PMU, $v(p, m)$, comment auriez-vous pu trouver directement la fonction de demande marshallienne ?

Réponse : En utilisant l'identité de Roy :

$$x(p_x, p_y, m) = -\frac{\frac{\partial v(p_x, p_y, m)}{\partial p_x}}{\frac{\partial v(p_x, p_y, m)}{\partial m}}$$

et

$$y(p_x, p_y, m) = -\frac{\frac{\partial v(p_x, p_y, m)}{\partial p_y}}{\frac{\partial v(p_x, p_y, m)}{\partial m}}$$

[2] Au sens strict, la fonction de demande marshallienne dépend également du vecteur de prix (p_x, p_y). Mais comme nous avons fixé ces prix dès l'énoncé, nous pouvons écrire une demande "pseudo marshallienne" comme une simple fonction du niveau de revenu.

Exercice 2 : le problème de minimisation de la dépense et la dualité

1. En supposant que le revenu m est tel que le programme admettra une solution intérieure, écrire le programme de minimisation de la dépense (PMD), avec $U(x,y) \leq \overline{u}$. Pour cela, écrivez proprement le programme lui-même, puis le Lagrangien associé, et enfin les conditions de Kuhn et Tucker. En déduire les fonctions de demande hicksienne[3] $h_x(\overline{u})$ et $h_y(\overline{u})$.

   Réponse : Le PMD s'écrit :

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & 5x + 3y \\ s.c. \quad & U(x,y) \geq \overline{u} \end{aligned}$$

   On écrit le Lagrangien comme une fonction de x, y et de λ (le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte posée sur l'utilité) :

$$L(x,y,\lambda) = -(5x+3y) + \lambda(U(x,y) - \overline{u})$$

   Les CPO s'écrivent :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L(x^*,y^*,\lambda^*)}{\partial x} = 0 && \iff 5 - \lambda^*(2x^* + 2 + 3y^*) = 0 \\ &\frac{\partial L(x^*,y^*,\lambda^*)}{\partial y} = 0 && \iff 3 - \lambda^* 3(x^* + 2) = 0 \\ &\frac{\partial L(x^*,y^*,\lambda^*)}{\partial \lambda} \geq 0 && \iff U(x,y) \geq \overline{u} \\ &\lambda^* \geq 0 && \\ &\lambda^*\big(U(x^*,y^*\big) - \overline{u}) = 0 && \end{aligned}$$

   A partir des deux premières conditions, on trouve que $3y^* = 3x^* + 8$. Par ailleurs, comme $(x+2)(x+3y) = \overline{u}$, on en déduit que $(x^*)^2 + 4x^* + 4 - \overline{u}/4 = 0$. Il faut donc trouver le discriminant du polynôme afin de trouver le panier de consommation optimal. On a $\Delta = b^2 - 4ac = \overline{u}$. Le discriminant étant positif, il y a deux racines réelles.

[3] Au sens strict, la fonction de demande hicksienne dépend également du vecteur de prix (p_x, p_y). Mais comme nous avons fixé ces prix dès l'énoncé, nous pouvons écrire une demande "pseudo hicksienne" comme une simple fonction du niveau d'utilité cible.

La première racine étant toujours négative, c'est la deuxième racine qui nous intéresse. Ainsi,

$$x^* = h_x(\overline{u}) = -2 + \frac{\sqrt{\overline{u}}}{2}$$

et donc :

$$y^* = h_y(\overline{u}) = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{\overline{u}}}{2}$$

2. A partir de la demande marshallienne et de la demande hicksienne, énoncer et vérifier la dualité du PMU et du PMD.

Réponse : On veut vérifier que :

$$x(e(\overline{u})) = h_x(\overline{u}), \quad y(e(\overline{u})) = h_y(\overline{u})$$

d'une part, et que :

$$x(m) = h_x(v(m)), \quad y(m) = h_y(v(m))$$

Il faut donc calculer la fonction de dépense associée au PMD :

$$\begin{aligned} e(\overline{u}) &= 5h_x(\overline{u}) + 3h_y(\overline{u}) \\ &= -\frac{8}{3} + 4\sqrt{\overline{u}} \end{aligned}$$

On remplace dans l'expression des demandes marshalliennes m par $e(\overline{u})$, et on retrouve bien les demandes hicksiennes, $h_x(\overline{u})$ et $h_y(\overline{u})$.

De même, il faut calculer la fonction d'utilité indirecte associée au PMU :

$$\begin{aligned} v(m) &= U(x(m), y(m)) \\ &= (x(m) + 2)(x(m) + y(m)) \\ &= \frac{m^2}{16} + m + 4 \\ &= (\frac{m}{4} + 2)^2 \end{aligned}$$

Il suffit alors de remplacer, dans l'expression des demandes hicksiennes $\overline{u}$ par $v(m)$, et on retrouve bien les demandes marshalliennes.

Exercice 3 : petite démonstration

Soit $\overline{U} > U(0)$; on suppose que $h(p,\overline{U})$ est un point (solution unique au PMD) pour tout vecteur $p > 0$. Démontrez la loi de la demande compensée :

$$\forall p', p'' > 0, \quad (p'' - p')\left[h(p'',\overline{U}) - h(p',\overline{U})\right] \leq 0$$

pour tout $\forall p', p'' > 0$.

Réponse : Comme les préférences sont strictement convexes, la demande hicksienne est un ensemble à un seul élément pour p et $\bar{U}$ donnés.

Par définition, $h(p'',\bar{U})$ est solution au PMD, sachant que le niveau d'utilité à atteindre est $\bar{U}$ et le vecteur de prix est p''. De même, $h(p',\bar{U})$ est solution au PMD, sachant que le niveau d'utilité à atteindre est $\bar{U}$ et le vecteur de prix est p'.

Alors, pour tout x tel que $U(x) \geq \bar{U}$, $p''h(p'',\bar{U}) \leq p''x$. En particulier :

$$p''h(p'',\bar{U}) \leq p''h(p',\bar{U})$$

De même, pour tout x tel que $U(x) \geq \bar{U}$, $p'h(p',\bar{U}) \leq p'x$, et donc en particulier :

$$p'h(p',\bar{U}) \leq p'h(p'',\bar{U})$$

Ainsi :

$$\begin{cases} p''\Big(h(p'',\bar{U}) - h(p',\bar{U})\Big) \leq 0 \\ p'\Big(h(p',\bar{U}) - h(p'',\bar{U})\Big) \leq 0 \iff p'\Big(h(p'',\bar{U}) - h(p',\bar{U})\Big) \geq 0 \end{cases}$$

Donc, en soustrayant un terme positif à un terme négatif, on obtient un terme négatif :

$$p''\Big(h(p'',\bar{U}) - h(p',\bar{U})\Big) - p'\Big(h(p'',\bar{U}) - h(p',\bar{U})\Big) \leq 0$$