Marianne Tenand
Microéconomie 1 (2016 - 2017) - Département d'économie ENS

TD 3

Cours 2 : Maximisation de l'utilité et minimisation de la dépense

1 Exercice 1 : programme de maximisation de l'utilité (PMU)

Soit un consommateur disposant d'un revenu m et consommant deux biens, x et y, dont les prix sont $p_x = 5$ et $p_y = 3$. Les préférences du consommateur peuvent être représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$U(x, y) = (x + 2)(x + 3y)$$

Questions :

1. Etudiez mathématiquement la forme des courbes d'indifférence de notre consommateur :
   (a) Les courbes d'indifférence sont-elles croissantes ou décroissantes dans le plan (x, y) ? Que pouvez-vous en déduire sur le signe du $TMS_{x,y}$ (sans le calculer) ?
   (b) Les préférences sont-elles convexes ?
   (c) Que se passe t'il quand $x = 0$? Et quand $y = 0$? Qu'en déduisez-vous pour la résolution du PMU ?
2. Ecrire et résoudre le PMU du consommateur. Pour cela :
   (a) Ecrire le PMU en faisant apparaître les contraintes ; en déduire le Lagrangien. Vérifier que votre nombre de contraintes est bien égal au nombre de multiplicateurs de Lagrange
   (b) Ecrire les conditions de Kuhn et Tucker (conditions de premier ordre)
   (c) Résolvez le PMU, en distinguer les trois cas de figures possibles (selon la valeur de m)

(d) Que valent les solutions $x^* = x(m)$ et $y^*(m)$? Pourquoi ne peut-on pas les qualifier de fonctions de demande marshallienne *stricto sensu* ?

(e) Si on vous avait donné directement la fonction d'utilité indirecte associée au PMU, $v(p, m)$, quelle propriété auriez-vous utilisé pour retrouver directement la fonction de demande marshallienne $x(p, m)$ et $y(p, m)$?

2 Exercice 2 : programme de minimisation de la dépense (PMD)

1. Soit un revenu m tel que le PMU précédent admette une solution intérieure, écrire le PMD, avec $U(x, y) \geq \overline{U}$. Pour cela :

   (a) Ecrivez le programme lui-même puis le Lagrangien

   (b) Ecrire les conditions de Kuhn et Tucker

   (c) En déduire les solutions $h_x^* = h(\overline{u})$ et $h_y^* = h(\overline{u})$. Pourquoi ne peut-on pas les qualifier de fonctions de demande hicksienne *stricto sensu* ?

2. En reprenant les solutions (intérieures) du PMD, énoncer et vérifier la dualité à partir des fonctions $x(m) = h_x(\overline{U})$ et $y(m) = h_y(\overline{U})$

3 Exercice 3 : petite démonstration

Soit $\overline{U} > U(0)$; on suppose que $h(p, \overline{U})$ est un point (solution unique au PMD) pour tout vecteur $p > 0$. Démontrez la loi de la demande compensée :

$$\forall p', p'' > 0, \quad (p'' - p') \left[h(p'', \overline{U}) - h(p', \overline{U}) \right] \leq 0$$