Marianne Tenand - Département d'économie ENS
Microéconomie 1 (2016 - 2017)

DM 2 : Théorie du producteur

Version corrigée le 14/12/2016

A remettre le vendredi 16 décembre à 19h
à mon bureau ou dans mon casier du bâtiment B

Ce DM comprend trois exercices portant sur la théorie du producteur. Les deux premiers sont assez mécaniques ; le troisième vise à illustrer la dualité dans la théorie du producteur.

Vous avez la possibilité de réaliser ce devoir en binôme. Le cas échéant, remettez-moi une seule copie avec vos deux noms.

Le barème est fourni à titre indicatif.

Exercice 1 : les fonctions de coût (un peu de dessin)

[3 points]

On considère les coûts de court terme d'une entreprise, certains de ses facteurs de production étant fixes à l'horizon temporel considéré.

Représentez une fonction de coût caractérisé par un coût fixe, ainsi que par un coût moyen décroissant puis croissant. Pour cela, faites apparaître le coût total (CT), le coût fixe (CF) et le coût variable (CV) sur un premier graphe dans le plan (Quantité - Coût).

Dans un deuxième graphique, aligné verticalement avec le premier et dans le même plan, représenter les fonctions de coût moyen (CM), de coût fixe moyen (CFM), de coût variable moyen (CVM) et enfin de coût marginal (cm).

Assurez-vous que les intersections et les relations entre les différentes courbes sont cohérentes. Justifiez votre représentation graphique de manière précise.

Exercice 2 : problème de minimisation du coût - la fonction de production CES

[8 points]

On considère la fonction de production CES avec deux facteurs de production x_1 et x_2 :

$$y = \left(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho\right)^{1/\rho}$$

avec $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\rho \neq 0$ et $-\infty < \rho < 1$. Sur leurs marchés respectifs, les facteurs de production ont un coût unitaire de w_1 et w_2 respectivement.

1. **La technologie de production**

   (a) Quel type de rendements d'échelle caractérise cette fonction de production ?

   (b) Calculer le taux marginal de substitution technique entre x_1 et x_2, $TMST_{1,2}(x_1, x_2)$.

   (c) Comment le $TMST_{1,2}(x_1, x_2)$ évolue avec le ratio d'inputs x_1/x_2 ou x_2/x_1 ? Qu'en déduisez-vous pour les isoquantes, et plus largement pour la résolution du problème de minimisation du coût ?

2. **Le PMC de long-terme**

   (a) Posez le problème de minimisation du coût (de long terme), en considérant un niveau de production cible $y_0 > 0$ et écrivez le Lagrangien associé.

   (b) Résolvez le PMC à l'aide des conditions de Kuhn et Tucker.

   (c) En déduire les demandes conditionnelles de facteurs. Le ratio des inputs utilisés à l'optimum dépend-il de l'échelle de production ?

   (d) En déduire les fonctions de coût total, de coût moyen et de coût marginal de long-terme.

   (e) Que remarquez-vous sur les fonctions de coût moyen et de coût marginal ? Est-ce cohérent avec ce que vous avez dit des rendements d'échelle caractérisant la technologie CES ?

3. **Le PMC de court terme**

   (a) On suppose qu'à court terme le facteur 2 est fixe à un niveau $\bar{x}_2 > 0$. Comment se réécrit le problème de minimisation du coût ?

   (b) Déterminez la fonction de demande conditionnelle de facteur x_1 à court terme. En déduire la fonction de coût de court terme.

   (c) Que pouvez-vous dire *a priori* de la relation entre le coût total de court terme et le coût total de long terme, pour un niveau de production y_0 donné ?

Exercice 3 : la dualité dans la théorie du producteur

[9 points]

L'objectif de cet exercice est d'étudier une fonction de profit particulière, dite additive en les prix des facteurs de production, et de fournir une illustration de la dualité dans la théorie du producteur.

Soit une firme placée dans un environnement concurrentiel dont la fonction de profit peut s'écrire :

$$\Pi(w_1, w_2) = \phi(w_1) + \phi(w_2)$$

où w_1 et w_2 sont les prix unitaires des deux facteurs de production utilisés par la firme. On normalise le prix de l'output à 1.

1. A partir des propriétés générales de la fonction de profit, que pouvez-vous dire des dérivées premières et secondes des fonctions $\phi(w_1)$ et $\phi(w_2)$?

2. On note $x_i(w_1, w_2)$ la demande inconditionnelle de facteur i. De quel signe est $\frac{\partial x_i(w_1,w_2)}{\partial w_j}$ (pour $i \neq j$) ? Interprétez le résultat brièvement.

   Indication : utilisez le lemme de Hotelling

   On note $f(x_1, x_2)$ qui a généré la fonction de profit d'intérêt. Nous allons essayer de voir ce que nous pouvons dire de cette fonction à partir de la seule connaissance de la forme de la fonction de profit.

3. Écrivez la fonction de profit à partir de la fonction de production et des demandes de facteurs.

4. Quelles sont les conditions de premier ordre du programme de maximisation du profit (utilisez l'expression du profit dérivée précédemment) ?

5. Montrez que les dérivées de la fonction de profit par rapport aux prix des facteurs de production permettent d'arriver aux mêmes équations.

6. Utilisez les réponses à la question précédente pour montrer qu'on peut écrire la fonction de production $f(x_1, x_2)$ comme la somme de deux fonctions $g(x_1)$ et $g(x_2)$:

$$f(x_1, x_2) = g(x_1) + g(x_2)$$

   NB : On voit ainsi que la séparabilité de la fonction de profit se retrouve dans la **séparabilité de la fonction de production**. On pourrait démontrer de manière similaire qu'une fonction de coût séparable en les prix des facteurs de production va de pair avec une fonction de production séparable.