

DM 1 : Théorie du consommateur

A remettre le vendredi 25 novembre à 19h

Ce DM comprend deux exercices, tous deux portant sur la théorie du consommateur. Le premier exercice illustre une situation microéconomique assez courante : l'agent fait face à une contrainte budgétaire dite coudée. La résolution du PMU fait principalement appel au TMS, qu'il vous faut bien maîtriser. Le deuxième exercice est le plus difficile ; revenez bien aux définitions des demandes hicksienne et marshallienne, et aux propriétés de la dualité.

Vous avez la possibilité de réaliser ce devoir en binôme. Le cas échéant, remettez-moi une seule copie avec vos deux noms.

Le barème est fourni à titre indicatif.

Exercice 1 : la demande de services d'aide à domicile chez les personnes âgées dépendantes

[12 points]

En France, la prise en charge de la dépendance des personnes âgées par les pouvoirs publics repose en grande partie sur l'Allocation personnalisée d'autonomie (APA). Cette prestation permet d'aider les personnes âgées dépendantes à payer des interventions d'aides professionnels, qui vont les assister dans les tâches de la vie quotidienne (ménage, toilette, habillement, etc.).

Le montant de cette allocation dépend à la fois du degré de dépendance de la personne et de ses ressources. Lorsqu'une personne fait une demande d'APA, une équipe du Conseil départemental (CD) se rend à son domicile pour évaluer le nombre d'heures d'aides dont elle a besoin, qu'on notera \bar{h} . Pour chacune des heures jugées nécessaires, le CD accorde une subvention proportionnelle au prix horaire de l'aide, qui va être d'autant plus importante que le revenu est faible.

Si la personne désire recevoir davantage d'heures d'aide à domicile, elle est tout à fait libre de le faire ; toutefois, les heures d'aide domicile consommées excédant le nombre d'heures jugées nécessaires par le CD ne seront pas subventionnées. Si la la personne désire recevoir moins d'heures d'aide que ce que le Conseil départemental lui a prescrit, elle est également libre de le faire.

On note :

- p le prix de marché d'une heure d'aide à domicile ;

- s le *taux* de la subvention horaire accordée par le CD, et S le *montant* de cette subvention horaire ;
- h le nombre d'heures d'aides effectivement consommées par la personne âgée (somme des heures subventionnées et des éventuelles heures non subventionnées).

Le montant de l'APA, noté APA , qui est finalement versé par le CD est ainsi égal à :

$$APA = \begin{cases} S.h & \text{si } h < \bar{h} \\ S.\bar{h} & \text{si } h \geq \bar{h} \end{cases}$$

On suppose enfin que le prix de marché d'une heure d'aide à domicile est de 20 €.

On considère un individu dont le revenu mensuel, noté R , s'élève à 900 €¹. Les incapacités physiques et cognitives de cette personne sont telles que le CD est prêt à participer au financement de 30 heures d'aide par mois ; en outre, ses ressources sont telles que le CD accorde pour chacune des heures d'aide effectivement consommées une subvention de 70 %.

1. Détermination de la contrainte budgétaire

- Que valent \bar{h} et S ? Que vaut le **reste à charge**, RAC , c'est-à-dire la somme que la personne âgée doit payer pour une heure d'aide consommée après que lui ait été versée la subvention horaire ?
- Ecrire la **dépense** $d(p, s, \bar{h}, h)$ en consommation de services d'aide à domicile *effectivement à charge de la personne*, comme une fonction du prix de marché du bien, de la subvention accordée, du nombre d'heures subventionnées accordées (\bar{h}) et du nombre d'heures consommées, selon les différents cas de figure possibles.
- Pourquoi pouvez-vous affirmer qu'à l'optimum, on aura :

$$y^* = R - d(p, s, \bar{h}, h^*)$$

avec h^* le volume d'heures d'aide consommé à l'optimum, et y^* la part du budget allouée à la consommation du bien composite à l'optimum ?

- Déterminer h_{max} le **maximum du nombre d'heures** d'aide que la personne peut consommer, compte tenu de ses ressources et de la subvention du CD.
- Déterminez et représentez la **contrainte budgétaire** dans le plan (h, y) , où h correspond au nombre d'heures d'aide à domicile consommées et y correspond au bien composite (qui se définit comme la quantité de ressources que la personne peut affecter à la consommation de biens et services autres que les services d'aide à

¹Pour votre information : en 2012 la pension moyenne de droit direct (hors réversion) des femmes retraitées est de 950 € mensuels, contre 1 650 € pour les hommes.

domicile ; le prix du bien composite est donc celui du numéraire, donc est égal à 1.).

2. Résolution du programme du consommateur

Supposez maintenant que l'utilité de l'individu peut être représentée par la fonction $U(h, y) = h^\alpha y^{1-\alpha}$, avec $0 < \alpha < 1$.

- (a) Ecrire et interpréter le **taux marginal de substitution** entre y et h , noté $TMS_{h,y}(h, y)$.
- (b) Pour quelles valeurs du $TMS_{h,y}(h, y)$ le nombre d'heures d'aide consommées à l'optimum, noté h^* , est exactement égal à \bar{h} ? Pour quelles valeurs du TMS $h^* < \bar{h}$? Enfin, pour quelles valeurs du TMS aura-t-on $h^* > \bar{h}$?
- (c) Si $\alpha = 0,15$, combien d'heures d'aide à domicile seront consommées par la personne âgée (notées h_1^*) ?

3. Effet d'une variation de la subvention horaire

Supposons maintenant que le CD décide d'augmenter la subvention accordée² : celle-ci passe à 90 % du prix facturé par le service d'aide à domicile.

- (a) Quel est maintenant le montant de la subvention, S_2 ? Et la nouvelle valeur du reste à charge, RAC_2 ?
- (b) Quel est le nouveau volume d'heures d'aide à domicile consommées h_2^* ? Comment l'expliquez-vous ? Illustrez à l'aide d'un graphique ce qu'il peut se passer.
- (c) Le CD est rattrapé par la crise des finances publiques. Il décide donc baisser sa subvention, qui ne s'élève plus qu'à 60 % du prix de marché. De même que précédemment, déterminer le montant horaire de la subvention S_3 et le nouveau reste à charge, RAC_3 . En déduire le volume d'heures d'aide à domicile consommées par la personne âgée, h_3^* .
- (d) A partir de h_1^* , h_3^* , RAC et RAC_3 , en déduire une approximation de la valeur de l'élasticité-prix³ de la demande d'aide à domicile au point h_1^* . Quel type de bien

²L'APA est en réalité une politique nationale ; le barème de l'aide est donc censé être défini au niveau national. Toutefois, les textes réglementaires ne précisant pas quel tarif doit être utilisé pour calculer la subvention (les Conseils départementaux peuvent choisir un tarif forfaitaire plutôt que le tarif facturé par le service d'aide à domicile choisi par le bénéficiaire de l'APA), les départements conservent en pratique une marge de manœuvre dans la détermination du montant de l'APA et des caractéristiques distributives et assurantielles de cette prestation.

³Il s'agit d'une élasticité-prix dite "élasticité arc".

(ou, pour être exact, service) l'aide à domicile constitue-t-elle ?

4. Une certaine proportion de bénéficiaires de l'Apa bénéficient d'une subvention à hauteur de 100 %. Pourtant, on observe que nombre d'individus dans ce cas consomment moins d'heures d'aide que le nombre d'heures subventionnées que leur accorde le CD ($h^* < \bar{h}$). Comment pourriez-vous l'expliquer ?

Pour vous aider, n'hésitez pas à tracer la droite de budget pour ces individus. On cesse de supposer que la fonction d'utilité est du type Cobb-Douglas.

5. Transfert monétaire versus subvention horaire

On se replace dans la configuration de la question 3 (utilité de type Cobb-Douglas avec $\alpha = 0,15$, $R = 900 \text{ €}$ et $\bar{h} = 30$). Supposons que, pour simplifier la gestion de sa politique, le CD décide de verser directement le montant d'APA au bénéficiaire, sur la base de son choix de consommation initial : $APA' = s.p.h_1^*$, où h_1^* est le volume d'heures consommées à l'optimum déterminé à la question 2. La prestation prend alors la forme d'un **transfert monétaire**.

- (a) Représentez dans un même graphique la contrainte budgétaire que vous aviez représentée à la question 1.e), et la contrainte budgétaire de la personne maintenant que l'APA a été transformée en transfert monétaire.
- (b) Résolvez le programme du consommateur dans cette nouvelle configuration.
- (c) Représentez sur le graphique le panier de consommation optimal déterminé à la question 2.c) et le panier de consommation optimal sachant que l'APA est devenue un transfert monétaire. Commentez le changement en termes d'effets de revenu et de substitution. Quel panier donne le plus haut niveau d'utilité ? Pouvez-vous l'interpréter de manière intuitive ?

Exercice 2 : variation compensatrice et variation équivalente

[8 points]

On s'intéresse au bien-être d'un consommateur de revenu m et dont l'utilité dépend de k biens (x_1, x_2, \dots, x_k) , dont les prix sont notés $\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_k)$. On suppose que les préférences du consommateur sont continues, rationnelles et monotones.

Le maire de la résidence dans laquelle réside le consommateur envisage de réaliser un projet dont la conséquence serait de faire passer le vecteur de prix de p à p' et le revenu de l'agent de m à m' . Il peut s'agir de la création d'un pôle de compétitivité qui aurait pour effet d'augmenter le salaire de l'individu mais aussi d'augmenter la demande - et donc, à fonction d'offre inchangée, les prix dans la commune.

Une mesure simple de la variation de bien-être (notée ΔBE) induite par le projet est la variation de l'*utilité indirecte* de l'individu :

$$\Delta BE = v(p', m') - v(p, m)$$

Le projet n'est avantageux pour l'individu que si $\Delta BE > 0$.

Cependant un tel critère ne permet pas d'estimer numériquement le gain ou la perte de bien-être : la fonction d'utilité indirecte n'étant définie qu'à une transformation croissante près (à préférences données), deux fonctions d'utilité indirecte correspondant aux mêmes préférences donneront en général deux mesures différentes de ΔBE . La solution de ce problème consiste à utiliser des *variations de bien-être mesurées en unités monétaires*.

1. En se restreignant au cas où le consommateur a le choix entre seulement deux biens, x_1 et x_2 , représenter dans le plan (x_1, x_2) le choix du consommateur qui maximise son utilité dans le cas où on a (p_1, p_2, m) et dans le cas où on a (p'_1, p'_2, m') .
2. Une première mesure monétaire possible de la variation du bien-être s'appelle la *variation équivalente*. Elle s'écrit :

$$VE = e(p, v(p', m')) - m$$

où e désigne la *fonction de dépense* du consommateur.

Que mesure VE ? Comment la représenteriez-vous graphiquement (toujours dans le cas à deux biens) ?

Indication : Reprenez la définition de la fonction de dépense.

3. Une seconde mesure monétaire possible de la variation de bien-être est appelée *variation compensatrice*. Elle se définit ainsi :

$$VC = m' - e(p', v(p, m))$$

où e désigne la fonction de dépense du consommateur.

Que mesure VC ? Comment la représenteriez-vous graphiquement (toujours dans le cas à deux biens) ?

4. Laquelle de VC ou de VE doit-on utiliser si on souhaite évaluer le coût d'une éventuelle indemnisation des agents lésés (pour définir un dédommagement financier par exemple) ?

Même question si l'objectif est plutôt d'estimer les bénéfices d'un projet, sans idée d'indemnisation. Justifiez vos réponses.

5. On suppose que seul le prix du bien 1 est susceptible d'augmenter (on a $p'_1 > p_1$), les prix des autres biens et le revenu de l'individu restant constants. En remarquant que :

$$m = m' = e(p, v(p, m)) = e(p', v(p', m))$$

montrez que :

$$VE = - \int_{p_1}^{p'_1} h_1(\bar{p}_1, p_2, \dots, p_k, u') d\bar{p}_1$$

et que :

$$VC = - \int_{p_1}^{p'_1} h_1(\bar{p}_1, p_2, \dots, p_k, u) d\bar{p}_1$$

h_1 désignant la demande hicksienne pour le bien 1, $u = v(p_1, p_2, \dots, p_k, m)$ et $u' = v(p'_1, p_2, \dots, p_k, m)$.

L'inconvénient de ces deux mesures monétaires est que la fonction de demande hicksienne n'est pas observable empiriquement, contrairement à la fonction de demande marshallienne. C'est pourquoi on utilise une approximation de la variation de bien-être appelée *variation de surplus*.

En restant dans le cas où seul le prix du bien 1 varie, la variation de surplus s'écrit :

$$VS = - \int_{p_1}^{p'_1} x_1(\bar{p}_1, p_2, \dots, p_k, m) d\bar{p}_1$$

6. Dans le plan (\bar{p}_1, x_1) , représentez graphiquement les fonctions $x_1(\bar{p}_1, p_2, \dots, p_k, m)$, $h_1(\bar{p}_1, p_2, \dots, p_k, u)$ et $h_1(\bar{p}_1, p_2, \dots, p_k, u')$.
7. Pour quelle valeur de \bar{p}_1 les fonctions $x_1(\bar{p}_1, p_2, \dots, p_k, m)$ et $h_1(\bar{p}_1, p_2, \dots, p_k, u)$ se coupent-elles ? Même question pour les fonctions $x_1(\bar{p}_1, p_2, \dots, p_k, m)$ et $h_1(\bar{p}_1, p_2, \dots, p_k, u')$.
8. On suppose que le bien 1 est un bien normal. Utilisez l'équation de Slutsky pour montrer que les fonctions de demande hicksienne sont moins pentues que les fonctions de demande marshallienne⁴.

9. En déduire que :

$$VC \leq VS \leq VE$$

10. Que devient cette relation dans le cas d'un bien inférieur ?

⁴Attention, contrairement à l'illustration vue en cours, on se place dans le plan (\bar{p}_1, x_1) et non dans le plan (x_1, \bar{p}_1) .