Université de TOURS - L1 GESTION

Enoncé du TD n° 6 - groupe 127

Bref corrigé du TD n° 6 - groupe 127

Automne 2019

Les savoirs à revoir pour ce TD : la définition d'un ensemble convexe dans le plan, la caractérisation d'une fonction concave, la manipulation des équations, les généralités sur le calcul des limites, en particulier les indéterminations et leur résolution. Enfin, il est nécessaire de revoir comment on calcule les variations locales d'une fonction, variations qui s'additionnent si elle ont pour source différentes variables.

Un ensemble est convexe s'il contient tout segment liant n'importe lequel de deux de ses éléments. Autrement dit $X, Y \in E$ implique $\lambda X + (1-\lambda)Y \in E$.

Une fonction f concave ($f'' \leq 0$) vérifie les deux propriétés suivantes : - f est en dessous de chacune de ses tangentes - f est au-dessus de chacune de ses cordes : $\forall x, y$: $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, $\lambda \in [0,1]$

$(+\infty)+(+\infty)$	$(+\infty)$
$(+\infty)-(+\infty)$	indéterminé
$(+\infty)*(+\infty)$	$(+\infty)$
$(+\infty)*(-\infty)$	$(-\infty)$
$\lambda*(+\infty), \lambda > 0$	$(+\infty)$
$\lambda*(+\infty), \lambda < 0$	$(-\infty)$
$0^+*(+\infty), \lambda > 0$	indéterminé
$(+\infty)/(+\infty)$	indéterminé
$(+\infty)/(0^-)$	$(-\infty)$

Soit une fonction $f(x,y)$ définie sur un ensemble ouvert, dont on cherche une approximation autour de (x,y), cad une approximation de la valeur $f(x+dx, y+dy)$: l'approximation est faite en considérant d'abord l'effet de la variation de x, de dx, puis l'effet de la variation de y, de dy, et en additionnant ces deux effets. On résume cette approche en écrivant : $df = f_x dx + f_y dy$.

1 Résoudre astucieusement une équation

On cherche à résoudre l'équation $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+6=0$

1) Montrer que $y=6$ est solution de l'équation $y2-11y+30=0$, puis réécrire cette équation sous la forme d'un produit, et en trouver toutes ses solutions.

Il s'agit simplement de calculer :

$$6^2 - 11*6+30 = 36-66+30 = 0$$

On peut donc factoriser $y-6$ dans l'équation initiale ce qui donne,

$$y2-11y+30=0 \iff (y-6)(y-5)=0$$

L'équation $y2-11y+30=0$ a deux solutions, $y=6$ et $y=5$.

2) Après avoir écrit l'équation sous la forme $(x-1)(x+3)(x-2)(x+4) = -6$, on trouvera l'ensemble de ses solutions

L'équation s'écrit encore, $(x-1)(x+3)(x-2)(x+4)+6=0$, soit encore, en développant deux par deux les produits, $(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)+6=0$

Définissons une variable auxiliaire $y = x2+2x$; L'équation $(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)+6=0$ s'écrit alors $(y-3)(y-8)+6=0$, soit, $y2-11y+24+6=0$, ou $y2-11y+30=0$ dont on sait, par la question précédente qu'elle a deux solutions, $y=5$ et $y=6$.

La solution $y=6$ s'écrit $x^2+2x=6$, soit $x = \dfrac{-2\pm\sqrt{4+24}}{2} = \dfrac{-2\pm 2\sqrt{7}}{2} = -1\pm\sqrt{7}$

La solution $y=5$ s'écrit $x^2+2x=5$, soit $x = \dfrac{-2\pm\sqrt{4+20}}{2} = \dfrac{-2\pm 2\sqrt{6}}{2} = -1\pm\sqrt{6}$ En conclusion, l'équation $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+6=0$ a quatre solutions

$$x = -1\pm\sqrt{7} \qquad x = -1\pm\sqrt{6}$$

3) Pouvait-on prédire que l'équation $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+6=0$ aurait 4 solutions ?

On retiendra qu'un polynome de degré n peut avoir jusqu'à n solutions. Ici le polynome est de degré 4, il aura donc au plus 4 solutions.

On ne peut pas prédire qu'il y a des racines double avant de les avoir calculé

4) La fonction $f = (x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+6$ a-t'elle des limites à l'infini ?

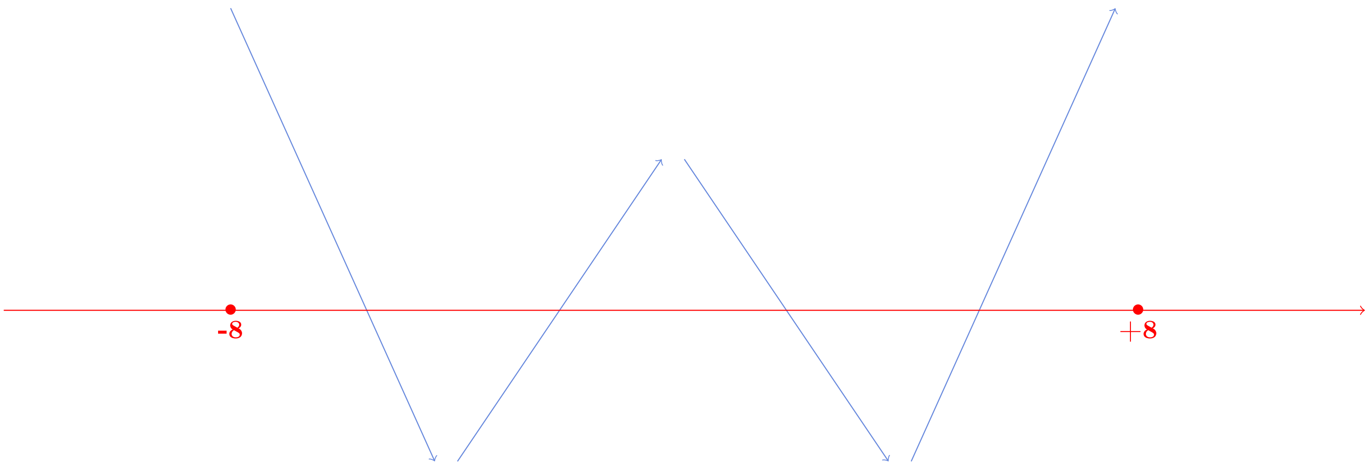
On réécrit la fonction f en factorisant x dans chaque terme :

$$f = x^4\left((1-\frac{1}{x})(1-\frac{2}{x})(1+\frac{3}{x})(1+\frac{4}{x})+\frac{6}{x^4}\right)$$

quand $x \to +\infty$ ou quand $x \to -\infty$, le terme x^4 en facteur tend vers plus l'infini, tandis que chacun des termes $(1-\frac{1}{x})$, $(1-\frac{2}{x})$, $(1+\frac{3}{x})$ et $(1+\frac{4}{x})$ tend vers 1. Par ailleurs le terme $\frac{6}{x^4}$ tend vers zéro. Ce qui fait que le terme dans la grande parenthèse tend vers 1. $1*(+\infty) = +\infty$. La fonction diverge donc à l'infini.

5) La fonction $f = (x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+6$ est-elle concave ou convexe ?

Difficile de penser qu'une fonction qui passe quatre fois par zéro, dont le profil (guidé par la question précédente) est décroissant croissant décroissant croissant,



soit concave ou convexe.

En effet, une fonction concave est au plus croissante puis décroissante

En effet, une fonction convexe est au plus décroissante puis croissante

2 Relation affine cachée

1) Une variable économique K vérifie l'équation $K = (Q_1+3Q_2)^3 \times L^{-1/5}$ où L, Q_1 et Q_2 sont des réels strictement positifs. Montrer que la variable Q_2 est une fonction affine de la variable Q_1, que l'on déterminera à l'aide des paramètres K et L.

On peut réécrire la définition de K sous une forme équivalente $(Q_1+3Q_2)^3 = KL^{1/5}$ ou encore $Q_1+3Q_2 = K^{1/3}L^{1/15}$, ce qui établit une relation affine entre les deux variables Q_1 et Q_2, quand les paramètres K et L sont fixés, relation qu'on peut encore écrire :

$$Q_2 = -\frac{1}{3}Q_1 + \frac{1}{3}K^{1/3}L^{1/15}$$

2) Montrer que l'équation d'une courbe $f(x,y) = 0$, c-a-d de l'ensemble des points (x,y) du plan qui vérifient la relation $f(x,y) = 0$ peut s'approximer par une relation linéaire. Interpréter ce que vous direz.

La courbe $f(x,y) = 0$ peut s'écrire autour d'un point donné (x,y) sous la forme $f(x+dx, y+dy) = 0$, ce qui s'écrit encore $df = 0$ ou de manière équivalente : $f_x dx + f_y dy = 0$, ce qui est une relation linéaire entre dx et dy. La pente de cette relation linéaire, n'est autre que la pente de la droite passant par le point (x,y) tangente à la courbe d'équation $f(x,y) = 0$.

3) Les variables K et L sont liés par la condition $L(K+1) = 12$, doit on en déduire que les variables L et K sont

- ☐ . . . . *proportionnelles ;*
- ☐ . . . . *inversement proportionnelles ;*

☐ . . . . *telles que L est une fonction affine de K ;*

☐ . . . . *telles que $K+1$ est une fonction affine de L.*

La bonne réponse est que K et L sont inversement proportionnelles, en effet, quand K augmente, le dénominateur de la fraction $\frac{12}{K+1}$ augmente, et cette fraction qui est L diminue : quand K augmente, L diminue, c'est la définition d'inversement proportionnel.

3 Limites

1) Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition, puis, s'il y a lieu, interpréter les résultats obtenus en terme d'asymptotes. On prendra soin, quand cette limite se présente comme une indétermination, d'expliquer comment vous levez l'indétermination.

$$-5x^3+3x^2-8x+2 \qquad \frac{4x^3-2}{x-5} \qquad \frac{3x-1}{x-2}$$

Il s'agit pour chacune des fonctions de déterminer d'abord l'ensemble de définition et ses bornes, puis de rechercher la limite

La première fonction $-5x^3+3x^2-8x+2$ est définie sur $\mathbb{R}$, dont les bornes sont $+\infty$ et $-\infty$. On recherche donc les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

- A priori la limite en $+\infty$ de la première fonction est indéterminée, de la forme $(+\infty)-(+\infty)$. Classiquement, on met en facteur le terme qui a la croissance la plus élevée, soit ici $-5x^3$, et généralement, le produit obtenu n'est plus indéterminé. Vérifions le dans le cas : $-5x^3+3x^2-8x+2 = x^3\left(-5+\frac{3}{x}-\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$; le terme dans la parenthèse tend vers - 5, le terme x^3 tend vers plus l'infini : il n'y a plus d'indétermination, car $-5*(+\infty)=(-\infty)$, on conclue $\lim_{x\to+\infty} -5x^3+3x^2-8x+2=-\infty$

- On traite de la même manière la limite en $-\infty$ en utilisant la même factorisation $-5x^3+3x^2-8x+2 = x^3\left(-5+\frac{3}{x}-\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$; le terme dans la parenthèse tend vers - 5, le terme x^3 tend vers moins l'infini ; on conclue $\lim_{x\to+\infty} -5x^3+3x^2-8x+2=+\infty$

La seconde fonction $\dfrac{4x^3-2}{x-5}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$, dont les bornes sont $+\infty$ et $-\infty$ et 5^- et 5^+. On a donc 4 limites à calculer.

- Pour les limites en $+\infty$ et $-\infty$, on opère la factorisation du terme qui croit le plus vite au numérateur par le terme qui croit le plus vite au dénominateur

$$\frac{4x^3-2}{x-5} = \frac{x^3}{x}\frac{4-\frac{2}{x^3}}{1-\frac{5}{x}} = x^2\frac{4-\frac{2}{x^3}}{1-\frac{5}{x}}$$

La fraction tend vers 4 quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, x^2 diverge, vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ et on peut conclure $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3-2}{x-5}=+\infty$

- Il y a moins de manipulation quand on recherche les limites en 5^- et en 5^+. En effet, en 5^-, la limite est du type $498/0^-$ et en 5^+ la limite est du type $498/0^+$. on peut conclure $\lim_{x\to5^-} \dfrac{4x^3-2}{x-5}=-\infty$ et $\lim_{x\to5^+} \dfrac{4x^3-2}{x-5}=+\infty$

La troisième fonction $\dfrac{3x-1}{x-2}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, dont les bornes sont $+\infty$ et $-\infty$ et 2^- et 2^+. On a donc 4 limites à calculer. En utilisant les mêmes méthodes, on trouve $\lim_{x\to2^+} \dfrac{3x-1}{x-2}=+\infty$, $\lim_{x\to2^-} \dfrac{3x-1}{x-2}=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x-1}{x-2}=3$, $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x-1}{x-2}=3$,

2) Appliquer la règle de l'Hopital pour lever l'indétermination des limites suivantes, quand $x\to0$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \qquad \frac{x}{\ln(1+x)} \qquad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-1} \qquad x\ln(x)$$

Pour chacun des exemples il convient déjà de vérifier que la limite est indéterminée de type 0/0, et de calculer les dérivées du numérateur et du dénominateur. Lé règle de l'Hopital s'applique si la dérivée du dénominateur n'est pas nulle.

Pour le premier exemple, $\frac{\ln(1+x)}{x}$ **le numérateur tend vers ln(1)=0, et le dénominateur vers 0. Le numérateur est dérivable, sa dérivée est** $1/(1+x)$**, soit en zéro : 1. Le dénominateur est dérivable, sa dérivée est** 1**. La règle de l'Hopital s'applique. On conclue** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1/1=1$

Le second exemple est à peu près identique, sauf que numérateur et dénominateurs sont inversés. On conclue $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1/1=1$

Pour le troisième exemple, $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-1}$ **le numérateur tend vers** $\sqrt{0}=0$**, et le dénominateur vers** $\sqrt{1}-1=0$**. Le numérateur est dérivable, sa dérivée est** $1/2\sqrt{x}$**, soit en** 0^+ **:** $+\infty$**. Le dénominateur est dérivable, sa dérivée est** $1/2\sqrt{x+1}$**, soit en** 0^+**,** $1/2$**. La règle de l'Hopital s'applique. On conclue** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-1}=+\infty$

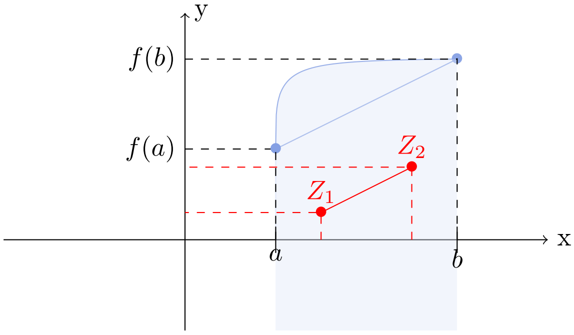
Le quatrième exemple,$x\ln(x)$ **ne ressemble pas à un exemple d'application de la règle de l'Hopital. Il est cependant indéterminé puisque la limite en** 0^+ **est de type** $0*(-\infty)$**. On peut cependant écrire ce produit sous la forme de la fraction suivante :**

$$\frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}}$$

et là, l'indétermination est bien de type $0/0$**. Sous cette forme numérateur** x **est dérivable, sa dérivée est** 1**. Par ailleurs, le dénominateur** $\frac{1}{\ln(x)}$ **est dérivable, sa dérivée est** $\frac{-1}{(\ln(x))^2}*1/x=-\frac{-x}{(\ln(x))^2}$**, dont la dérivée a pour limite en** 0^+**,** $0/\infty=0$**. La règle de l'Hopital ne s'applique pas quand la dérivée du dénominateur tend vers 0.**

4 Ensembles convexes

1) Soit une fonction $x\to f(x)$ concave définie sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer que l'ensemble $\{(x,y)/y\le f(x)\}$ est convexe.



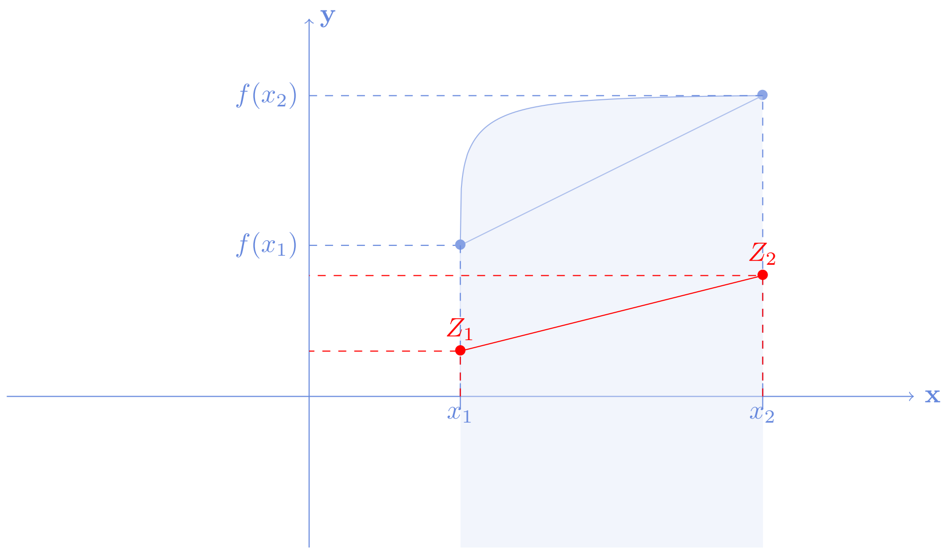
Première Méthode : Considérons maintenant deux points $Z_1(x_1,y_1)$ **et** $Z_2(x_2,y_2)$ **quelconques dans l'ensemble** $\{(x,y)/y\le f(x)\}$**. On a par définition** $y_1\le f(x_1)$ **et** $y_2\le f(x_2)$**. Considérons un point entre** Z_1 **et** Z_2 **de coordonnées** $(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)$**. On a :**

$$\begin{aligned}\lambda y_1+(1-\lambda)y_2 &\le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_1)\\ &\le f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2),\end{aligned}$$

la première inégalité due au fait que Z_1 **et** Z_2 **sont sous la courbe** f**, la seconde inégalité provenant de** f **concave. Donc** $\lambda Z_1+(1-\lambda)Z_2$ **appartient bien à** $\{(x,y)/y\le f(x)\}$**, ce qui achève de démontrer que cet ensemble est convexe.**

Seconde Méthode : Considérons maintenant deux points $Z_1(x_1,y_1)$ **et** $Z_2(x_2,y_2)$ **quelconques dans l'ensemble** $\{(x,y)/y\le f(x)\}$**. Par définition** $y_1\le f(x_1)$ **et** $y_2\le f(x_2)$**. Donc, le segment qui lie** Z_1 **à** Z_2 **est en dessous du segment qui relie** $(x_1,f(x_1))$ **à** $(x_2,f(x_2))$**. Or, comme** f **est concave, on sait que** f **est au dessus de toutes ses cordes, et, en particulier, au-dessus du segment qui relie** $(x_1,f(x_1))$ **à** $(x_2,f(x_2))$**. Par transitivité, on en déduit que** f **est au dessus du segment qui lie** Z_1 **à** Z_2 **: dit autrement, tout point** (x_3,y_3) **de ce segment est tel que** $y_3\le f(x_3)$**, donc un élément de** $\{(x,y)/y\le f(x)\}$**, ce qui achève**

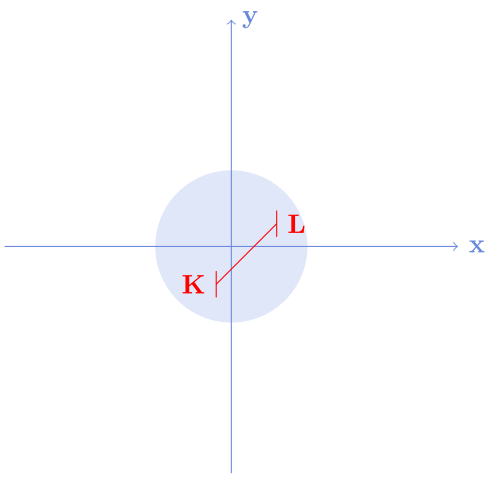
de démontrer que cet ensemble est convexe.



2) Montrer, par tout argument que vous jugerez adéquat que les ensembles suivants du Plan sont convexes

$$x^2 + y^2 \leq 1 \qquad x^{-3} + y^4 \leq 1(\text{ } pour x \in [1, 3])$$

Commençons par le premier ensemble d'équation $x^2 + y^2 \leq 1$ est le disque unité bien connu :



Il s'agit de démontrer que si $K(x, y)$ et $L(a, b)$ appartiennent au disque, alors il en est pareil de tout point $\lambda K + (1 - \lambda)L$ du segment AB, de coordonnée $(\lambda x + (1 - \lambda)a, \lambda y + (1 - \lambda)b)$. Il nous faut donc vérifier l'équation

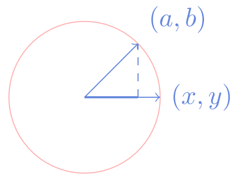
$$(\lambda x + (1 - \lambda)a)^2 + (\lambda y + (1 - \lambda)b)^2 \leq 1$$

Notons $k = (\lambda x + (1 - \lambda)a)^2 + (\lambda y + (1 - \lambda)b)^2$. En développant, on trouve

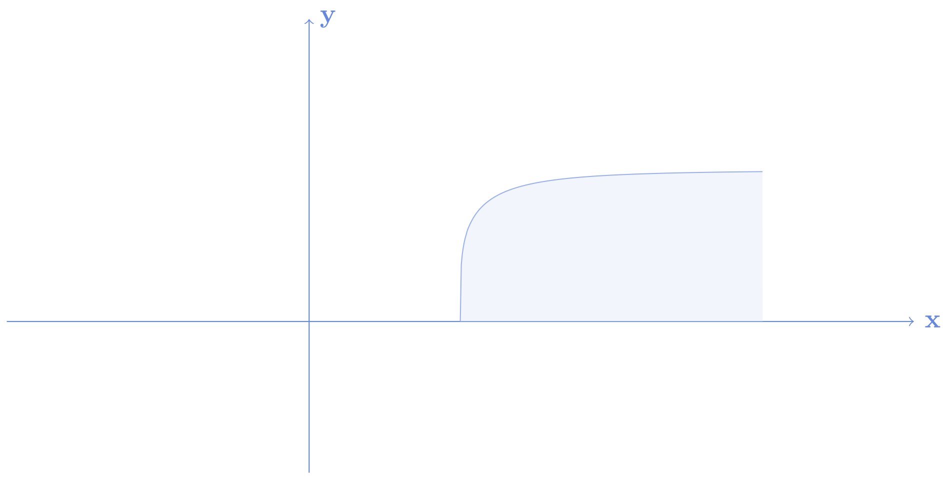
$$\begin{aligned}
k &= (\lambda^2 x^2 + 2\lambda(1 - \lambda)ax + (1 - \lambda)^2 a^2) + (\lambda^2 y^2 + 2\lambda(1 - \lambda)yb + (1 - \lambda)^2 b^2) \\
&= \lambda^2(x^2 + y^2) + 2\lambda(1 - \lambda)(ax + by) + (1 - \lambda)^2(a^2 + b^2) \\
&\leq \lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda)(ax + by) + (1 - \lambda)^2 \\
&= \lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda) + (1 - \lambda)^2 + 2\lambda(1 - \lambda)[(ax + by) - 1] \\
&= (\lambda + (1 - \lambda))^2 + 2\lambda(1 - \lambda)[(ax + by) - 1] \\
&= 1 - 2\lambda(1 - \lambda)[1 - (ax + by)] \leq 1 \qquad \forall \lambda \in [0, 1],
\end{aligned}$$

the first inequality coming from the fact that (x, y) and (a, b) belongs to the unit disk, the second inequality coming from the fact that the scalar product between two vectors which lenght is less or

equal one is less or equal than one (see for instance next figure).



Continuons par le second ensemble d'équation $x^{-3}+y^4 \leq 1$ pour $x \in [1,3]$ qu'on peut réécrire $y^4 \geq 1-x^{-3}$ ce qui s'écrit $y \geq (1-x^{-3})^{1/4}$, ensemble dont la frontière dont la frontière a pour équation $y=(1-x^{-3})^{1/4}$ qu'on peut représenter ainsi, :



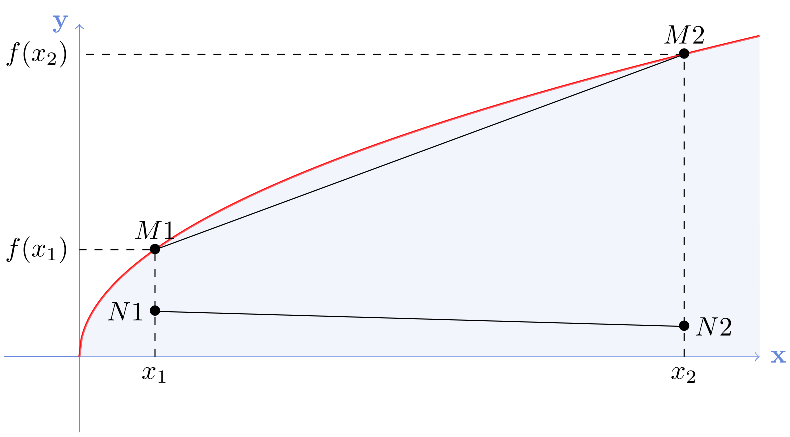
Ici il apparait que l'ensemble qui est sous la fonction $y=f(x)$ avec $f(x)=(1-x^{-3})^{1/4}$ est convexe, car cette fonction est concave (résultat de la première question). Regardons un peu plus les détails.

$f(x) = (1-x^{-3})^{1/4}$ est bien une fonction croissante concave. En effet, $f'(x) = \frac{1}{4}(1-x^{-3})^{-3/4} * -1 * -3x^2 = \frac{3x^2}{4}(1-x^{-3})^{-3/4} > 0$ et $f''(x) = \frac{6x}{4}(1-x^{-3})^{-3/4} + \frac{3x^2}{4}\frac{-3}{4}(1-x^{-3})^{-7/4} * -1 * -3x^2$ qu'on peut réécrire $f''(x) = \frac{3}{16}(1-x^{-3})^{-7/4}[8(1-x^{-3})-9] = \frac{3}{16}(1-x^{-3})^{-7/4}[-1-x^{-3}] < 0$.

On appelle Ensemble de production, dans le cas d'une firme qui produit un bien manufacturé à partir d'un intput l'ensemble des points $\{(x,y)\}$ tels que la quantité y (ou inférieure) de bien manufacturé qui peut être produite à partir d'une quantité x d'input. On appelle fonction de production $f(x)$ le maximum de bien manufacturé produit à partir de la quantité x d'input

3) Montrer que dans le cas d'une firme avec un input et un output, si l'ensemble des plans de production est convexe, alors la fonction de production est concave et vice versa. On prendra soin de faire une démonstration par un graphique commenté, et, si nécessaire une démonstration plus formelle.

L'énoncé nous indique de partir d'un ensemble de production convexe, comme dans la figure ci-après, où x désigne la quantité d'input utilisé et y la quantité de bien produits :



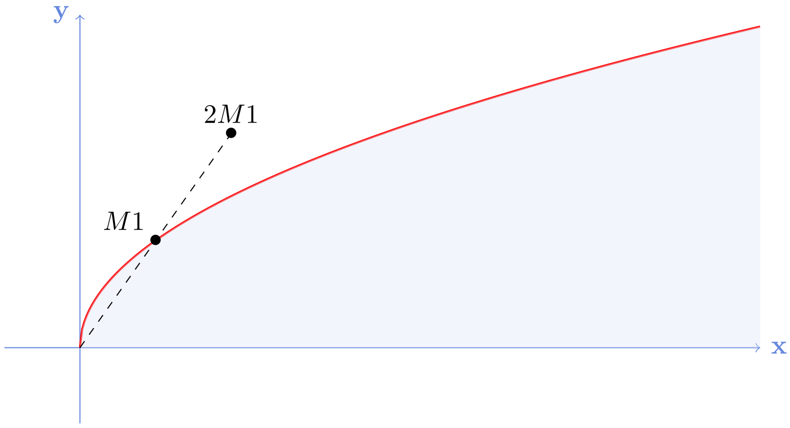
On a pris soin de tracer la limite supérieure de l'ensemble de production qui n'est autre que la fonction $f(x)$, cad le montant maximal de bien manufacturé produit à partir de x. L'ensemble de production est donc l'ensemble des points situés sous la fonction f.

Montrons que si f est concave, alors l'ensemble de production est convexe **Soient deux plans de production situés sur la frontière $M1(x_1, f(x_1)$ et $M2(x_2, f(x_2)$. L'ensemble des points situés entre $M1$ et $M2$ est ce qu'on appelle une corde, et par définition, quand f est concave, cela reste "en-dessous" de f. Donc, dans ce qu'on appelle l'ensemble de production. Si on part de deux autres plans de production quelconques $N1$ et $N2$, on trace les plans de productions $M1$ et $M2$ situés sur la frontière correspondants, et le segment $N1N2$ est en dessous du segment $M1M2$ qui est compris dans l'ensemble de production : donc $N1N2$ est dans l'ensemble de production.**

Montrons que si l'ensemble de production est convexe , alors f est concave **Prenons une corde sur f, de type $M1\ M2$: les deux points correspondants appartiennent à l'ensemble de production, donc l'ensemble des points sur le segment $M1\ M2$ appartiennent à l'ensemble de production puisque ce dernier est convexe. Donc le segment $M1\ M2$ reste en dessous de f. Et on sait qu'une fonction qui reste au-dessus de ses cordes est concave. cqfd.**

4) Lorsque vous avez un plan de production convexe, est-ce que si vous pouvez produire y à partir de x, vous est-il en général possible de produire $2y$ à partir de $2x$?

La réponse est en général non. En effet, regardons déjà graphiquement, en reprenant le graphique précédent ;



si on prend $M1$ sur la frontière, alors $2M1$ ne l'est pas.[L'hypothèse qui est cachée dans le graphique est $f(0) = 0$, cad que $(0, 0)$est sur la frontière de l'ensemble de production.] Plus formellement, puisque f est strictement concave : '

$$x = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}2X \quad \Longrightarrow f(x) > \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(2X) = \frac{1}{2}f(2X)$$

soit encore $f(2x) < 2f(x)$ ce qui montre que le point $(2x, 2f(x))$ n'est pas dans l'ensemble de production

5) interpréter la question 3) à la lumière de la questions précédente. Pourquoi est-on interressé à avoir un ensemble de production convexe.

La première interprétation est de dire que si on a deux plans de production $M1$ et $M2$, on peut prendre une combinaison linéaire des deux , cad $\lambda M1 + (1 - \lambda)M2$.

Dit plus généralement, on peut toujours combiner deux idées (deux plans), pour produire une certaine quantité de bien manufacturé.

Ce qui est absolument à retenir est que lorsque la technologie est convexe, on ne peut pas multiplier par deux les inputs pour multiplier par deux les outputs. On parle alors de rendement d'échelle décroissants.

5 Corrélations, dérivées et dérivées partielles

1) Soit deux variables x et y qui sont corrélées, et plus précisément liées par une relation du type $f(x, y) = 0$. *On supposera qu'on s'intéresse au cas où x et y sont tous nes deux des nombres positifs ou nuls.* Dire, dans les applications ci-après s'il y a une corrélation positive ou négative entre x et y. Utiliser des arguments simples et intuitifs. En déduire la croissance ou la décroissante de la de l'équation représentée dans un espace x, y.

$$x^2 + y - 1 = 0 \qquad xy - 1 = 0 \qquad x + yx - 1 = 0 \qquad (x-1)(y+1) - 3 = 0$$

On supposera dans le dernier cas que $x \geq 1$.

dans le premier cas pour que l'équation demeure vraie quand y augmente, il faut que x^2 diminue, cad que x diminue : x et y sont corrélées négativement. L'équation $x^2 + y - 1 = 0$ est donc décroissante dans un espace x, y.

dans le second cas pour que l'équation demeure vraie, il faut que xy soit constante. Ainsi, quand y augmente, il faut que x diminue : x et y sont corrélées négativement. L'équation $xy - 1 = 0$ est donc décroissante dans un espace x, y.

dans le troisième cas que l'on peut écrire $x(1+y) - 1 = 0$, pour que l'équation demeure vraie il faut que $x(1+y)$ demeure constante. Aussi, quand x augmente, il faut que $1+y$ diminue, cad que y diminue : x et y sont corrélées négativement. L'équation $x + yx - 1 = 0$ est donc décroissante dans un espace x, y.

dans le quatrième cas pour que l'équation demeure vraie il faut que $(x-1)(1+y)$ demeure constante. pour que l'équation demeure vraie quand y augmente, il faut que $x - 1$ diminue, cad que x diminue : x et y sont corrélées négativement. L'équation $(x-1)(y+1) - 3$ est donc décroissante dans un espace x, y.

2) On considère les quatre fonctions suivantes de x et y ; pour ces quatre fonctions, calculer leurs *dérivées partielles* par rapport à x et y, et vérifier qu'elles ont bien le même signe. Est-ce que le fait que ces dérivées partielles ont le même signe vous étonne ou pas ?

$$f = x^2 + y - 1 \qquad g = xy - 1 \qquad u = x + yx - 1 \qquad v = (x-1)(y+1) - 3$$

On a des fonctions qui ont été «construites» à partir des équations précédentees. Les dérivées sont standards, pas de difficulté particulière. Le fait qu'elles ont le même signe, entraine que les variables sont corélées positivement. Les raisonnements intuitifs ont plus ou moins implicitement été fait par la compréhension du signe des dérivées partielles.

dans le premier cas,

$$f_x = 2x \geq 0 \qquad f_y = 1 \geq 0$$

les deux dérivées sont positives

dans le second cas,

$$g_x = y \geq 0 \qquad g_y = x \geq 0$$

les deux dérivées sont positives

dans le troisième cas,

$$u_x = 1 + y \geq 0 \qquad u_y = x \geq 0$$

les deux dérivées sont positives

dans le quatrième cas,

$$v_x = y + 1 \geq 0 \qquad v_y = x - 1 \geq 0$$

les deux dérivées sont positives

3) La fonction de coût d'une firme est $C(q) = 3q^2 + q + 1$. Quelle est la dérivée de la fonction de coût autour de q ? Peut-on dire que les couts marginaux sont croissants ? Peut-on dire que le coût unitaire est toujours plus élevé que 1 ?

$C'(q) = 6q + 1$.

$C''(q) = 6$. **La dérivée des coûts marginaux est croissante, le coût marginal est donc croissant. On aurait pu arriver à cette conclusion plus rapidement, en regardant d'un peu plus près l'edxpression du coût marginal :** $C'(q) = 6q + 1$.**En effet, cette fonction est croissante avec** q

Enfin, $C'(q) = 6q + 1 \geq 1$ **:le coût marginal est toujours supérieur à 1. Produire une unité coûte toujours plus que 1 dans cet exemple.**

4) Donner un exemple de fonction de coût dont le coût marginal est positif et croissant, mais toujours compris entre 0 et 1

Première étape On essaye par tâtonnement

Par exemple $C(q) = \dfrac{q}{q+1}$**, cette fonction est comprise entre 0 et 1, on doit calculer ses deux dérivées pour vérifier que le coût marginal est positif et croissant. Pour ce faire, on réécrit la fonction** C **sous la forme** $C(q) = \dfrac{q+1-1}{q+1} = 1 - \dfrac{1}{q+1}$.

Il vient aisément : $C'(q) = -(-\dfrac{1}{(q+1)^2}) = \dfrac{1}{(q+1)^2} \geq 0$ **MAIS : ici, lecoût marginal n'est pas croissant.**

Si on Réessaye, on aura pas plus de chance

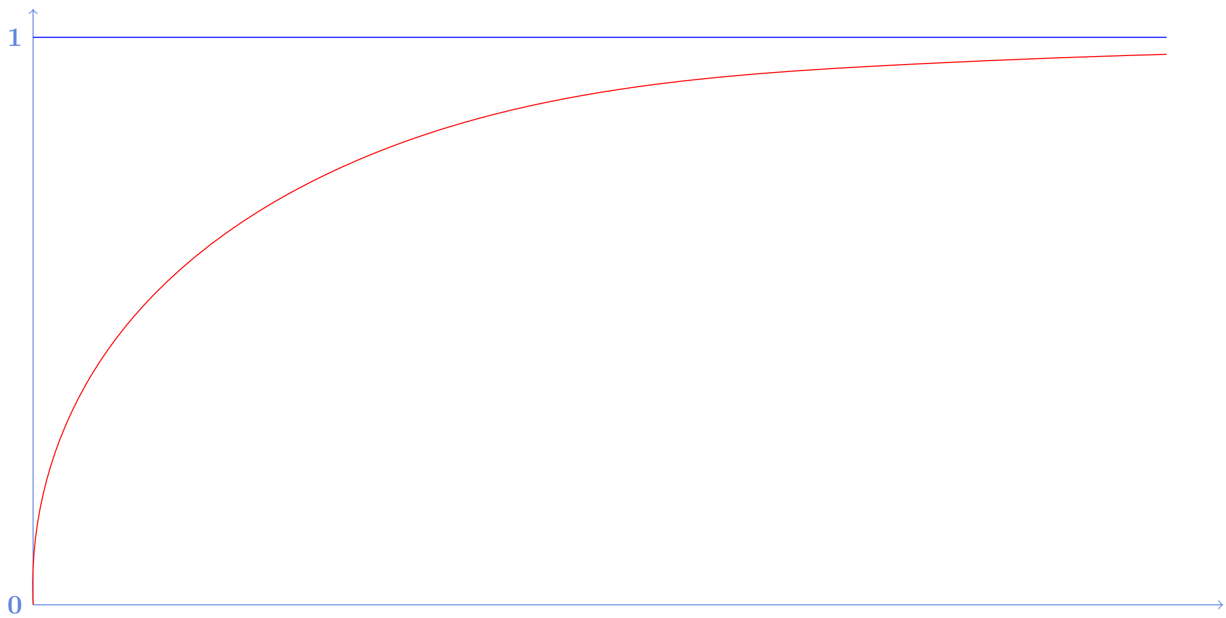
Prenons en espérant l'essai plus heureux, par exemple $C(q) = 1 - e^{(-q)}$**, cette fonction est comprise entre 0 et 1, on doit calculer ses deux dérivées pour vérifier que le coût marginal est positif et croissant.**

$$C'(q) = -1 * -1 * e^{(-q)} = e^{(-q)}$$

Malheureusement, si le coût marginal est positif, il reste décroissant

Deuxième étape Il y a une bonne raison pour laquelle on ne trouve pas d'exemple de fonction de coût dont le coût marginal est positif et croissant, mais toujours compris entre 0 et 1 : parce qu'il n'y en a pas

Si on regarde graphiquement à quoi ressemble une fonction croissante bornée, c'est la limite finie qui va donner une de ses propriétés essentielles : ne pas être convexe :



cad que les coûts marginaux doivent obligatoirement décroitre à partir d'un certain temps

Formellement, on raisonne PAR L'ABSURDE. Si l'on suppose que C **est convexe (et que** $C(0) = 0$ **et que** $C(1) > 0$**), alors, par définition d'une fonction convexe, on peut écrire pour tout** $a, b \geq 0$ **et pour tout** $\lambda \in [0, 1]$ **la relation :**

$$C\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \leq \lambda C(a) + (1-\lambda)C(b)$$

Si on applique cette relation pour $b = 0$ pour $a = x$ et pour $\lambda = 1/x$ (en supposant que $x \geq 1$), on a la relation

$$C(1) \leq \frac{1}{x} C(x)$$

que l'on écrit encore

$$C(x) \geq C(1)x,$$

ce qui dénie le fait que la fonction $C(x)$ puisse être bornée par 1, puisque $\lim_{x \to +\infty} C(1)x = +\infty$
Remarque : Cette dernière preuve n'est pas exigible à l'examen

******************* FIN DU TD 6*******************