Université de TOURS - L1 GESTION

Cours Maths Stats Appliqués à la Gestion

Bref corrigé du TD n° 6 - groupe 127

Automne 2018

Les savoirs à revoir pour ce TD : la définition d'un ensemble convexe dans le plan, la caractérisation d'une fonction concave, la manipulation des équations, les généralités sur le calcul des limites, en particulier les indéterminations et leur résolution. Enfin, il est nécessaire de revoir comment on calcule les variations locales d'une fonction, variations qui s'additionnent si elle ont pour source différentes variables.

<table>
<tr>
<td>Un ensemble est convexe s'il contient tout segment liant n'importe lequel de deux de ses éléments. Autrement dit $X, Y \in E$ implique $\lambda X + (1-\lambda)Y \in E$.</td>
<td>Une fonction f concave ($f'' \leq 0$) vérifie les deux propriétés suivantes : - f est en dessous de chacune de ses tangentes - f est au-dessus de chacune de ses cordes : $\forall x, y$: $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \quad \lambda \in [0,1]$</td>
<td>
<table>
<tr><td>$(+\infty) + (+\infty)$</td><td>$(+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$(+\infty) - (+\infty)$</td><td>indéterminé</td></tr>
<tr><td>$(+\infty) * (+\infty)$</td><td>$(+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$(+\infty) * (-\infty)$</td><td>$(-\infty)$</td></tr>
<tr><td>$\lambda * (+\infty), \lambda > 0$</td><td>$(+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$\lambda * (+\infty), \lambda < 0$</td><td>$(-\infty)$</td></tr>
<tr><td>$0^+ * (+\infty), \lambda > 0$</td><td>indéterminé</td></tr>
<tr><td>$(+\infty)/(+\infty)$</td><td>indéterminé</td></tr>
<tr><td>$(+\infty)/(0^-)$</td><td>$(-\infty)$</td></tr>
</table>
</td>
<td>Soit une fonction $f(x, y)$ définie sur un ensemble ouvert, dont on cherche une approximation autour de (x, y), cad une approximation de la valeur $f(x+dx, y+dy)$: l'approximation est faite en considérant d'abord l'effet de la variation de x, de dx, puis l'effet de la variation de y, de dy, et en additionnant ces deux effets. On résume cette approche en écrivant : $df = f_x dx + f_y dy$.</td>
</tr>
</table>

1 Relation affine cachée

1) Une variable économique K vérifie l'équation $K = (Q_1 + 3Q_2)^3 \times L^{-1/5}$ où L, Q_1 et Q_2 sont des réels strictement positifs. Montrer que la variable Q_2 est une fonction affine de la variable Q_1, que l'on déterminera à l'aide des paramètres K et L.

On peut réécrire la définition de K sous une forme équivalente $(Q_1+3Q_2)^3 = KL^{1/5}$ ou encore $Q_1+3Q_2 = K^{1/3}L^{1/15}$, ce qui établit une relation affine entre les deux variables Q_1 et Q_2, quand les paramètres K et L sont fixés, relation qu'on peut encore écrire :

$$Q_2 = -\frac{1}{3}Q_1 + \frac{1}{3}K^{1/3}L^{1/15}$$

2) Montrer que l'équation d'une courbe $f(x, y) = 0$, c-a-d de l'ensemble des points (x, y) du plan qui vérifient la relation $f(x, y) = 0$ peut s'approximer par une relation linéaire. Interpréter ce que vous direz.

La courbe $f(x, y) = 0$ peut s'écrire autour d'un point donné (x, y) sous la forme $f(x + dx, y + dy) = 0$, ce qui s'écrit encore $df = 0$ ou de manière équivalente : $f_x dx + f_y dy = 0$, ce qui est une relation linéaire entre dx et dy. La pente de cette relation linéaire, n'est autre que la pente de la droite passant par le point (x, y) tangente à la courbe d'équation $f(x, y) = 0$.

3) Les variables K et L sont liés par la condition $L(K + 1) = 12$, doit on en déduire que les variables L et K sont

- ☐ . . . . *proportionnelles ;*
- ☐ . . . . *inversement proportionnelles ;*
- ☐ . . . . *telles que L est une fonction affine de K ;*
- ☐ . . . . *telles que $K + 1$ est une fonction affine de L.*

La bonne réponse est que K et L sont inversement proportionnelles, en effet, quand K augmente, le

dénominateur de la fraction $\frac{12}{K+1}$ augmente, et cette fraction qui est L diminue : quand K augmente, L diminue, c'est la définition d'inversement proportionnel.

2 Limites

1) Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition, puis, s'il y a lieu, interpréter les résultats obtenus en terme d'asymptotes. On prendra soin, quand cette limite se présente comme une indétermination, d'expliquer comment vous levez l'indétermination.

$$-5x^3 + 3x^2 - 8x + 2 \qquad \frac{4x^3 - 2}{x - 5} \qquad \frac{3x - 1}{x - 2}$$

Il s'agit pour chacune des fonctions de déterminer d'abord l'ensemble de définition et ses bornes, puis de rechercher la limite

La première fonction $-5x^3+3x^2-8x+2$ est définie sur $\mathbb{R}$, dont les bornes sont $+\infty$ et $-\infty$. On recherche donc les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

- A priori la limite en $+\infty$ de la première fonction est indéterminée, de la forme $(+\infty)-(+\infty)$. Classiquement, on met en facteur le terme qui a la croissance la plus élevée, soit ici $-5x^3$, et généralement, le produit obtenu n'est plus indéterminé. Vérifions le dans le cas : $-5x^3+3x^2-8x+2 = x^3\left(-5+\frac{3}{x}-\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$; le terme dans la parenthèse tend vers - 5, le terme x^3 tend vers plus l'infini : il n'y a plus d'indétermination, car $-5*(+\infty) = (-\infty)$, on conclue $\lim_{x\to+\infty} -5x^3+3x^2-8x+2 = -\infty$

- On traite de la même manière la limite en $-\infty$ en utilisant la même factorisation $-5x^3+3x^2-8x+2 = x^3\left(-5+\frac{3}{x}-\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$; le terme dans la parenthèse tend vers - 5, le terme x^3 tend vers moins l'infini ; on conclue $\lim_{x\to+\infty} -5x^3+3x^2-8x+2 = +\infty$

La seconde fonction $\dfrac{4x^3-2}{x-5}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$, dont les bornes sont $+\infty$ et $-\infty$ et 5^- et 5^+. On a donc 4 limites à calculer.

- Pour les limites en $+\infty$ et $-\infty$, on opère la factorisation du terme qui croit le plus vite au numérateur par le terme qui croit le plus vite au dénominateur

$$\frac{4x^3-2}{x-5} = \frac{x^3}{x}\frac{4-\frac{2}{x^3}}{1-\frac{5}{x}} = x^2\frac{4-\frac{2}{x^3}}{1-\frac{5}{x}}$$

La fraction tend vers 4 quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, x^2 diverge, vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ et on peut conclure $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{4x^3-2}{x-5} = +\infty$

- Il y a moins de manipulation quand on recherche les limites en 5^- et en 5^+. En effet, en 5^-, la limite est du type $498/0^-$ et en 5^+ la limite est du type $498/0^+$. on peut conclure $\lim_{x\to5^-}\dfrac{4x^3-2}{x-5} = -\infty$ et $\lim_{x\to5^+}\dfrac{4x^3-2}{x-5} = +\infty$

La troisième fonction $\dfrac{3x-1}{x-2}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, dont les bornes sont $+\infty$ et $-\infty$ et 2^- et 2^+. On a donc 4 limites à calculer. En utilisant les mêmes méthodes, on trouve $\lim_{x\to2^+}\dfrac{3x-1}{x-2} = +\infty$, $\lim_{x\to2^-}\dfrac{3x-1}{x-2} = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{x-2} = 3$, $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{x-2} = 3$,

2) Appliquer la règle de l'Hopital pour lever l'indétermination des limites suivantes, quand $x \to 0$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \qquad \frac{x}{\ln(1+x)} \qquad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-1} \qquad x\ln(x)$$

Pour chacun des exemples il convient déjà de vérifier que la limite est indéterminée de type 0/0, et de calculer les dérivées du numérateur et du dénominateur. Lé règle de l'Hopital s'applique si la dérivée du dénominateur n'est pas nulle.

Pour le premier exemple, $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ le numérateur tend vers ln(1)=0, et le dénominateur vers 0. Le numérateur est dérivable, sa dérivée est $1/(1+x)$, soit en zéro : 1. Le dénominateur est dérivable, sa dérivée est 1. La règle de l'Hopital s'applique. On conclue $\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1/1 = 1$

Le second exemple est à peu près identique, sauf que numérateur et dénominateurs sont inversés. On conclue $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(1+x)} = 1/1 = 1$

Pour le troisième exemple, $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-1}$ **le numérateur tend vers** $\sqrt{0} = 0$**, et le dénominateur vers** $\sqrt{1}-1 = 0$**. Le numérateur est dérivable, sa dérivée est** $1/2\sqrt{x}$**, soit en** 0^+ **:** $+\infty$**. Le dénominateur est dérivable, sa dérivée est** $1/2\sqrt{x+1}$**, soit en** 0^+**,** $1/2$**. La règle de l'Hopital s'applique. On conclue** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-1} = +\infty$

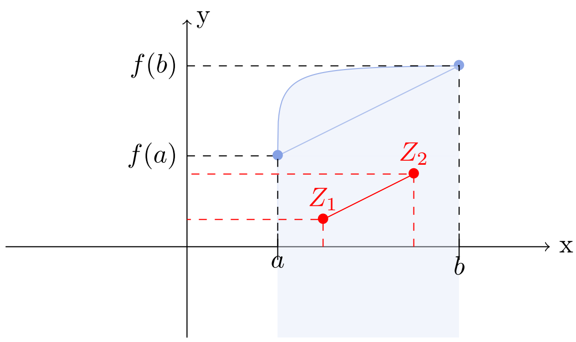
Le quatrième exemple,$x\ln(x)$ **ne ressemble pas à un exemple d'application de la règle de l'Hopital. Il est cependant indéterminé puisque la limite en** 0^+ **est de type** $0*(-\infty)$**. On peut cependant écrire ce produit sous la forme de la fraction suivante :**

$$\frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}}$$

et là, l'indétermination est bien de type $0/0$**. Sous cette forme numérateur** x **est dérivable, sa dérivée est** 1**. Par ailleurs, le dénominateur** $\frac{1}{\ln(x)}$ **est dérivable, sa dérivée est** $\frac{-1}{(\ln(x))^2} * 1/x = -\frac{-x}{(\ln(x))^2}$**, dont la dérivée a pour limite en** 0^+**,** $0/\infty = 0$**. La règle de l'Hopital ne s'applique pas quand la dérivée du dénominateur tend vers 0.**

3 Ensembles convexes

1) Soit une fonction $x \to f(x)$ concave définie sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer que l'ensemble $\{(x,y)/y \leq f(x)\}$ est convexe.



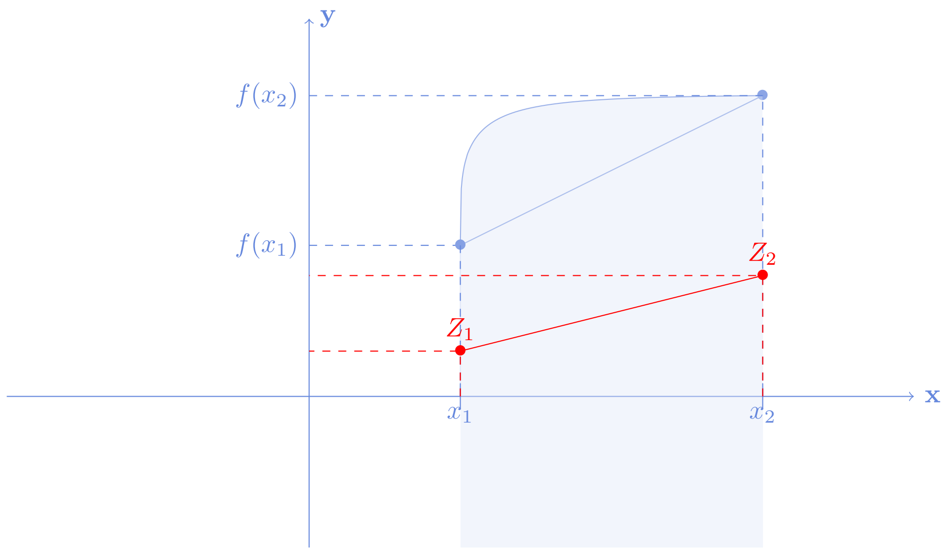
Première Méthode : Considérons maintenant deux points $Z_1(x_1,y_1)$ **et** $Z_2(x_2,y_2)$ **quelconques dans l'ensemble** $\{(x,y)/y \leq f(x)\}$**. On a par définition** $y_1 \leq f(x_1)$ **et** $y_2 \leq f(x_2)$**. Considérons un point entre** Z_1 **et** Z_2 **de coordonnées** $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$**. On a :**

$$\begin{aligned} \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 &\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_1) \\ &\leq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2), \end{aligned}$$

la première inégalité due au fait que Z_1 **et** Z_2 **sont sous la courbe** f**, la seconde inégalité provenant de** f **concave. Donc** $\lambda Z_1 + (1-\lambda)Z_2$ **appartient bien à** $\{(x,y)/y \leq f(x)\}$**, ce qui achève de démontrer que cet ensemble est convexe.**

Seconde Méthode : Considérons maintenant deux points $Z_1(x_1,y_1)$ **et** $Z_2(x_2,y_2)$ **quelconques dans l'ensemble** $\{(x,y)/y \leq f(x)\}$**. Par définition** $y_1 \leq f(x_1)$ **et** $y_2 \leq f(x_2)$**. Donc, le segment qui lie** Z_1 **à** Z_2 **est en dessous du segment qui relie** $(x_1, f(x_1))$ **à** $(x_2, f(x_2))$**. Or, comme** f **est concave, on sait que** f **est au dessus de toutes ses cordes, et, en particulier, au-dessus du segment qui relie** $(x_1, f(x_1))$ **à** $(x_2, f(x_2))$**. Par transitivité, on en déduit que** f **est au dessus du segment qui lie** Z_1 **à** Z_2 **: dit autrement, tout point** (x_3, y_3) **de ce segment est tel que** $y_3 \leq f(x_3)$**, donc un élément de** $\{(x,y)/y \leq f(x)\}$**, ce qui achève**

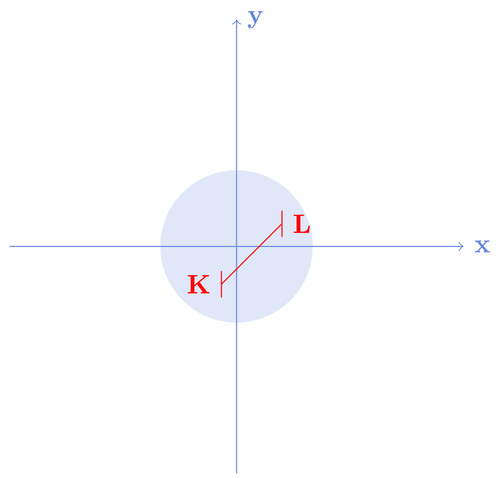
de démontrer que cet ensemble est convexe.



2) Montrer, par tout argument que vous jugerez adéquat que les ensembles suivants du Plan sont convexes

$$x^2 + y^2 \leq 1 \qquad x^{-3} + y^4 \leq 1(\; pour x \in [1, 3])$$

Commençons par le premier ensemble d'équation $x^2 + y^2 \leq 1$ est le disque unité bien connu :



Il s'agit de démontrer que si $K(x, y)$ et $L(a, b)$ appartiennent au disque, alors il en est pareil de tout point $\lambda K + (1-\lambda)L$ du segment AB, de coordonnée $(\lambda x + (1-\lambda)a, \lambda y + (1-\lambda)b)$. Il nous faut donc vérifier l'équation

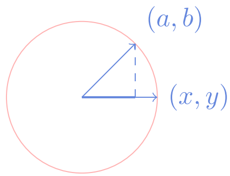
$$(\lambda x + (1-\lambda)a)^2 + (\lambda y + (1-\lambda)b)^2 \leq 1$$

Notons $k = (\lambda x + (1-\lambda)a)^2 + (\lambda y + (1-\lambda)b)^2$. En développant, on trouve

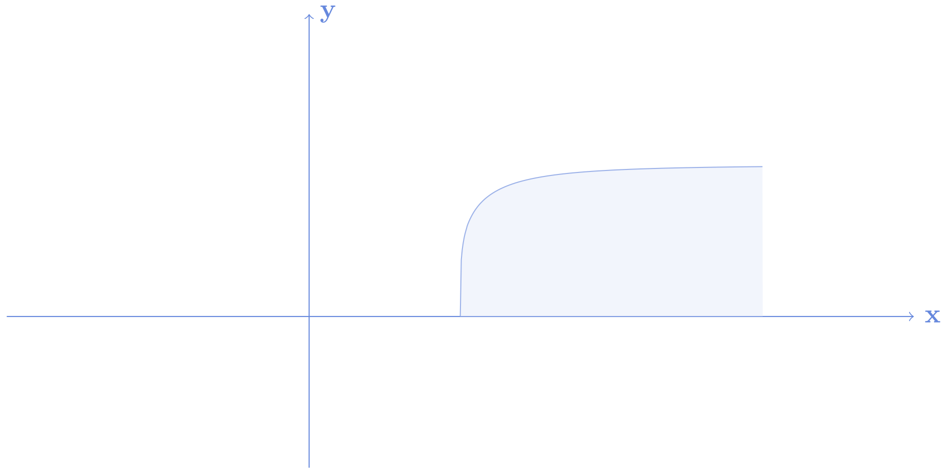
$$\begin{array}{rcl} k & = & (\lambda^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)ax + (1-\lambda)^2 a^2) + (\lambda^2 y^2 + 2\lambda(1-\lambda)yb + (1-\lambda)^2 b^2) \\ & = & \lambda^2(x^2+y^2) + 2\lambda(1-\lambda)(ax+by) + (1-\lambda)^2(a^2+b^2) \\ & \leq & \lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda)(ax+by) + (1-\lambda)^2 \\ & = & \lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda)[(ax+by)-1] \\ & = & (\lambda + (1-\lambda))^2 + 2\lambda(1-\lambda)[(ax+by)-1] \\ & = & 1 - 2\lambda(1-\lambda)[1-(ax+by)] \leq 1 \qquad \forall \lambda \in [0,1], \end{array}$$

the first inequality coming from the fact that (x, y) and (a, b) belongs to the unit disk, the second inequality coming from the fact that the scalar product between two vectors which lenght is less or

equal one is less or equal than one (see for instance next figure).



Continuons par le second ensemble d'équation $x^{-3}+y^4 \leq 1$ pour $x \in [1,3]$ qu'on peut réécrire $y^4 \geq 1-x^{-3}$ ce qui s'écrit $y \geq (1-x^{-3})^{1/4}$, ensemble dont la frontière dont la frontière a pour équation $y = (1-x^{-3})^{1/4}$ qu'on peut représenter ainsi, :

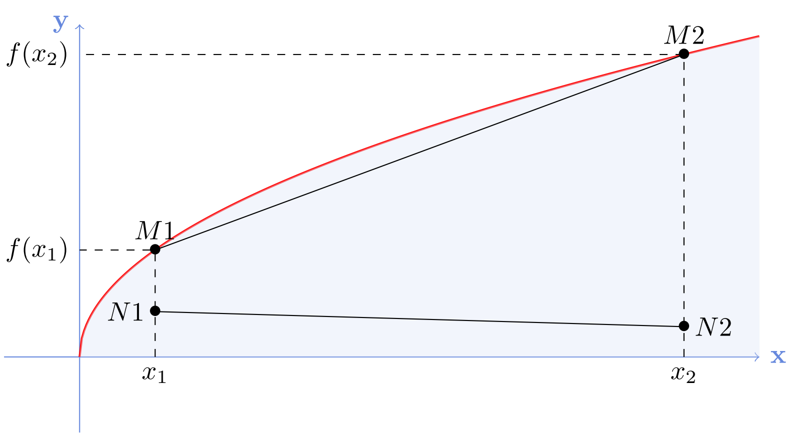


Ici il apparait que l'ensemble qui est sous la fonction $y = f(x)$ avec $f(x) = (1-x^{-3})^{1/4}$ est convexe, car cette fonction est concave (résultat de la première question). Regardons un peu plus les détails.
$f(x) = (1-x^{-3})^{1/4}$ est bien une fonction croissante concave. En effet, $f'(x) = \frac{1}{4}(1-x^{-3})^{-3/4} * -1 * -3x^2 = \frac{3x^2}{4}(1-x^{-3})^{-3/4} > 0$ et $f''(x) = \frac{6x}{4}(1-x^{-3})^{-3/4} + \frac{3x^2}{4}\frac{-3}{4}(1-x^{-3})^{-7/4} * -1 * -3x^2$ qu'on peut réécrire $f''(x) = \frac{3}{16}(1-x^{-3})^{-7/4}[8(1-x^{-3})-9] = \frac{3}{16}(1-x^{-3})^{-7/4}[-1-x^{-3}] < 0$.

On appelle Ensemble de production, dans le cas d'une firme qui produit un bien manufacturé à partir d'un intput l'ensemble des points $\{(x,y)\}$ tels que la quantité y (ou inférieure) de bien manufacturé qui peut être produite à partir d'une quantité x d'input. On appelle fonction de production $f(x)$ le maximum de bien manufacturé produit à partir de la quantité x d'input

3) Montrer que dans le cas d'une firme avec un input et un output, si l'ensemble des plans de production est convexe, alors la fonction de production est concave et vice versa. On prendra soin de faire une démonstration par un graphique commenté, et, si nécessaire une démonstration plus formelle.

L'énoncé nous indique de partir d'un ensemble de production convexe, comme dans la figure ci-après, où x désigne la quantité d'input utilisé et y la quantité de bien produits :



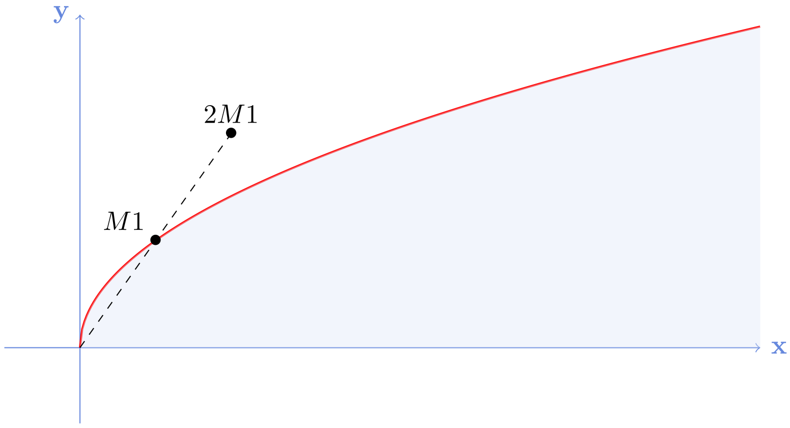
On a pris soin de tracer la limite supérieure de l'ensemble de production qui n'est autre que la fonction $f(x)$, cad le montant maximal de bien manufacturé produit à partir de x. L'ensemble de production est donc l'ensemble des points situés sous la fonction f.

Montrons que si f est concave, alors l'ensemble de production est convexe Soient deux plans de production situés sur la frontière $M1(x_1, f(x_1)$ et $M2(x_2, f(x_2)$. L'ensemble des points situés entre $M1$ et $M2$ est ce qu'on appelle une corde, et par définition, quand f est concave, cela reste "en-dessous" de f. Donc, dans ce qu'on appelle l'ensemble de production. Si on part de deux autres plans de production quelconques $N1$ et $N2$, on trace les plans de productions $M1$ et $M2$ situés sur la frontière correspondants, et le segment $N1N2$ est en dessous du segment $M1M2$ qui est compris dans l'ensemble de production : donc $N1N2$ est dans l'ensemble de production.

Montrons que si l'ensemble de production est convexe , alors f est concave Prenons une corde sur f, de type $M1$ $M2$: les deux points correspondants appartiennent à l'ensemble de production, donc l'ensemble des points sur le segment $M1$ $M2$ appartiennent à l'ensemble de production puisque ce dernier est convexe. Donc le segment $M1$ $M2$ reste en dessous de f. Et on sait qu'une fonction qui reste au-dessus de ses cordes est concave. cqfd.

4) Lorsque vous avez un plan de production convexe, est-ce que si vous pouvez produire y à partir de x, vous est-il en général possible de produire $2y$ à partir de $2x$?

La réponse est en général non. En effet, regardons déjà graphiquement, en reprenant le graphique précédent ;



si on prend $M1$ sur la frontière, alors $2M1$ ne l'est pas.[L'hypothèse qui est cachée dans le graphique est $f(0) = 0$, cad que $(0, 0)$est sur la frontière de l'ensemble de production.] Plus formellement, puisque f est strictement concave : '

$$x = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}2X \quad \Longrightarrow f(x) > \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(2X) = \frac{1}{2}f(2X)$$

soit encore $f(2x) < 2f(x)$ ce qui montre que le point $(2x, 2f(x))$ n'est pas dans l'ensemble de production

5) interpréter la question 3) à la lumière de la questions précédente. Pourquoi est-on interressé à avoir un ensemble de production convexe.

La première interprétation est de dire que si on a deux plans de production $M1$ et $M2$, on peut prendre une combinaison linéaire des deux , cad $\lambda M1 + (1 - \lambda)M2$.

Dit plus généralement, on peut toujours combiner deux idées (deux plans), pour produire une certaine quantité de bien manufacturé.

Ce qui est absolument à retenir est que lorsque la technologie est convexe, on ne peut pas multiplier par deux les inputs pour multiplier par deux les outputs. On parle alors de rendement d'échelle décroissants.

4 Différentielles

1) Soit deux variables x et y qui sont corrélées, et plus précisement liés par une relation du type $f(x,y) = 0$. Dire, dans les applications ci-après quand x varie de dx de combien varie y. (En d'autres termes calculer dy en fonction de dx).

$$x^2 + y - 1 = 0 \qquad xy - 1 = 0 \qquad x + yx - 1 = 0 \qquad (x-1)(y+1) - 3 = 0$$

Ici le plus simple est de calculer la différentielle de f qui doit être nulle puisque f ne varie pas quand x et y varient en même temps. On a dans le cas général

$$df = f_x dx + f_y dy$$

de l'équation $df = 0$ on déduit, lorsque $f_y \neq 0$: $dy = -\frac{f_x}{f_y} dx$
Dans le premier cas $f_x = 2x$, $f_y = 1$ et on trouve $dy = -2xdx$
Dans le SECOND cas $f_x = Y$, $f_y = X$ et on trouve $dy = -\frac{y}{x} dx$
Dans le troisième cas $f_x = 1 + y$, $f_y = x$ et on trouve $dy = -\frac{1+y}{x} dx$
Dans le premier cas $f_x = y + 1$, $f_y = x - 1$ et on trouve $dy = -\frac{y+1}{x-1} dx$

2) En remplaçant y par sa valeur, comparer les différentielles que vous obtenez pour la seconde et la troisième fonction. Interpréter ce que vous obtenez.

Dans le second cas $y = 1/X$ et donc la différentielle est $dy = -(1/x^2)dx$
Dans le troisième cas $y + 1 = 1/X$ et donc la différentielle est $dy = -(1/x^2)dx$
Les deux différentielles étant identiques, on en déduit que les deux courbes $xy - 1 = 0$ et $x + yx - 1 = 0$ sont parallèles, à une constante verticale près.

3) La fonction de coût d'une firme est $C(q) = 3q^2 + q + 1$. Quelle est la différentielle de la fonction de coût autour de q ? Que dire de la différentielle calculée quand q augmente. Est-ce normal ? Interpréter ce résultat.

On applique sans réfléchir la formule : $dC = (6q+1)dq$. Plus q augmente, plus la différentielle est élevée. Ce qui est normal puisque c'est la pente de la fonction de coût, c'est-à-dire le coût marginal, dont on suppose classiquement qu'il est croissant. L'interprétation en est que plus q est élevé, plus le coefficient de l'approximation linéaire est grand : plus q est élevé, plus une augmentation de la production, d'une quantité dq aura un effet sur le coût.

Pour les dernières questions on suppose que les deux variables x et y sont telles que $x^2 + y^2 = 1$.

4) Dire comment varie $f(x,y)$, pour une fonction quelconque en fonction de dx et dy

La différentielle additionne les effets de la variation de x et de la variation de y. Précisément $df = f_x dx + f_y dy$.

5) Différentiez l'équation $x^2 + y^2 = 1$ et en déduire comment varie dy en fonction de dx quand x et y se déplacent sur la courbe $x^2 + y^2 = 1$.

Différentiez l'équation $x^2 + y^2 = 1$ signifie égaliser la différentielle du membre de gauche, à savoir $2xdx + 2ydy$ avec la différentielle du membre de droite, à savoir 0. On trouve donc

$$2xdx + 2ydy = 0 \text{ ce qu'on peut écrire } dy = -\frac{x}{y} dx$$

6) de la question précédente, trouver une expression de df en fonction de dx seulement

On remplace dans l'expression de df trouvée dans la question 4, l'expression de dy en fonction de dx trouvée dans la question 5. On trouve : $df = f_x dx + f_y\left(-\frac{x}{y} dx\right) = \left(f_x - \frac{x}{y} f_y\right) dx$.

7) AN quand $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.