Université de TOURS - L2 Gestion

Cours Outils mathématiques d'aide à la décision

Corrigé bref du TD n° 5 - groupe 127

Optimisation avec contrainte

Automne 2019

On considère le problème $\max_{x,y}\ f(x,y) s.c. g(x,y) \geq 0$ *avec* $f_x > 0$ *et* $f_y > 0$ *et avec* $\{g(x,y) \geq 0\}$ *borné. On dira par ailleurs en relation avec le programme précédent qu'un couple* (x,y) *est* faisable *s'il satisfait la contrainte* $g(x,y) \geq 0$.

Les savoirs à revoir pour ce TD : les dérivées d'une fonction de deux variables, les conditions d'optimisation sans contrainte d'une fonction de deux variables, le caractère contraignant ou non d'une contrainte, la méthode du Lagrangien

Une fonction $f(x,y)$ dépend pour la calculer de x et de y. Elle varie quand x varie, ce qui donne lieu à la mesure f_x de ses variations, et parallèlement, mais différemment, elle varie quand y varie, ce qui donne lieu au calcul de f_y.	Une condition nécessaire pour avoir un maximum local d'une fonction $f(x,y)$ quand il n'y a pas de contrainte : condition première, dite FOC : $f_x = 0$ et $f_y = 0$ Une condition nécessaire pour avoir un maximum local d'une fonction $f(x,y)$ quand il y a la contrainte $g(x,y) = 0$: condition première, dite FOC : Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ / $f_x = \alpha g_x$ et $f_y = \alpha g_y$	Dans le cas où le programme contraint $\max_{x,y}\ f(x,y) s.c. g(x,y) \geq 0$ alors il existe $\lambda > 0$ tel que (x^*, y^*) a une solution, cette solution est aussi solution du programme non contraint $\max_{x,y}\ f(x,y) + \lambda g(x,y)$. La méthode de Lagrange propose donc de trouver la solution d'un tel programme non contraint en utilisant les méthodes d'optimisation non contraintes.. Les FOC, si $g_x \neq 0$ et si $g_y \neq 0$: $\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}$.	Avec la méthode de Lagrange, il est parfois plus aisé de vérifier les conditions secondes, qui seront vérifiées si f et g sont concaves : $f_{xx} \leq 0$, $f_{yy} \leq 0$, $\Delta = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 \geq 0$ et $g_{xx} \leq 0$, $g_{yy} \leq 0$, $\Delta = g_{xx}g_{yy} - (g_{xy})^2 \geq 0$, sinon, lorsque f et g quasi-convexes cad $\{f \geq \alpha\}$ convexe et $\{g \geq \alpha\}$ convexe.

1 Lagrangien

1) Ecrire le Lagrangien pour les différents programmes suivants. Puis résoudre ces programmes, ou du moins, donner les conditions que doivent satisfaire les solutions.

$$\begin{array}{llllllll} Max_{x_1,x_2} & U(x_1,x_2) & \quad & Max_{p,q} & pq - \frac{1}{4}q^2 & \quad & Max_{q,c} & pq - c \\ s.c. & p_1x_1 + p_2x_2 \leq R & & s.c. & q \leq 100 - p & & s.c. & c \geq \frac{1}{4}q^2 \end{array}$$

Pour ecrire le Lagrangien, il faut bien prendre soin de transformer la contrainte sous la forme $g(x,y) \geq 0$ **et alors le Lagrangien est** $\mathcal{L} = f + \lambda g$**.**

Dans le premier cas, il faut réécrire la contrainte $R - p_1x_1 - p_2x_2 \geq 0$**. Le Lagrangien est alors** $\mathcal{L} = U(x_1,x_2) + \lambda(R - p_1x_1 - p_2x_2)$**.**

Dans le deuxième cas, il faut réécrire la contrainte $100 - p - q \geq 0$**. Le Lagrangien est alors** $\mathcal{L} = pq - \frac{1}{4}q^2 + \lambda(100 - p - q)$**.**

Dans le troisième cas, il faut réécrire la contrainte $c - \frac{1}{4}q^2 \geq 0$**. Le Lagrangien est alors** $\mathcal{L} = pq - c + \lambda\left(c - \frac{1}{4}q^2\right)$**.**

Ensuite, il faut pour chacun des cas déterminer si la contrainte est ou non saturée. Ce qui est le plus difficile, puis ensuite, écrire les conditions premières en dérivant le Lagrangien par rapport aux variables que l'on recherche.

Dans le premier cas, la contrainte $p_1x_1 + p_2x_2 \leq R$ **est saturée, sinon, on peut par exemple augmenter** x_1 **un peu et augmenter ainsi l'utilité. On dérive le Lagrangien par rapport à** x_1 **et par rapport à** x_2**. Le Lagrangien est** $\mathcal{L} = U(x_1,x_2) + \lambda(R - p_1x_1 - p_2x_2)$**, ses dérivées** $\mathcal{L}_1 = U_1\lambda(-p_1)$ **et** $\mathcal{L}_2 = U_2\lambda(-p_2)$**. Les conditions premières s'écrivent donc**

$$U_1 = \lambda p_1 \qquad U_2 = \lambda p_2$$

ce qui conduit à la célèbre condition

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

cad qu'un point singulier est tel que le TMS de bien 1 en bien 2 égale le prix relatif de bien 1 en bien 2. À ce stade là, on ne peut pas aller plus loin, si ce n'est dans des applications numériques où on peut évaluer le TMS $\frac{U_1}{U_2}$ en fonction de x_1 et x_2.

Dans le second cas, la contrainte $p \leq 100 - q$ est saturée, sinon, une fois q choisi, on pourrait augmenter légèrement le prix, ce qui aurait pour effet d'augmenter le profit du monopole . On dérive le Lagrangien par rapport à p et par rapport à q. Le Lagrangien est $\mathcal{L} = pq - \frac{1}{4}q^2 + \lambda\,(100 - p - q)$, ses dérivées $\mathcal{L}_p = q + \lambda * (-1) = q - \lambda$ et $\mathcal{L}_q = p - \frac{1}{4} * 2q + \lambda * (-1)$. Les conditions premières s'écrivent donc

$$q = \lambda \qquad -\lambda = \frac{1}{2} * q - p$$

ce qui conduit à la condition

$$\frac{p - \frac{1}{2} * q}{q} = -1$$

Que l'on réécrit généralement

$$\frac{p - \frac{1}{2} * q}{p} = \frac{1}{\frac{p}{q}}$$

Interprétation : le problème est celui du monopole, qui veut augmenter (ses prix et) ses profits, mais qui est contraint par une demande qui réagit à ses augmentations de prix. Le coût de ce monopole est $\frac{1}{4}q^2$, et donc on reconnaît le coût marginal dans Le terme de gauche, qui s'écrit $\frac{p - C_m}{p}$. Dans le terme de droite, on a une quantité qui dépend de la demande du marché. La demande étant $q = 100 - p$, on reconnaît l'élasticité par rapport au prix qui est, dans cet exemple précis $\varepsilon = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = -\frac{p}{q}$ Les conditions premières de ce programme s'écrivent donc

$$\frac{p - C_m}{p} = \frac{1}{-\varepsilon}$$

Si l'élasticité est très grande, le monopole pourra peu augmenter ses prix, Si l'élasticité est petite, le monopole pourra sensiblement augmenter ses prix.

Dans le troisième cas, la contrainte $c \leq \frac{1}{4}q^2$ est saturée, sinon, on pourrait diminuer c et augmenter le terme $pq - c$ qui n'est autre que le profit d'une firme. On dérive le Lagrangien par rapport à q et à c. Le problème est en effet écrit en fonction de ces deux variables. Le Lagrangien est $\mathcal{L} = pq - c + \lambda\left(c - \frac{1}{4}q^2\right)$, ses dérivées, $\mathcal{L}_q = p - \lambda\frac{1}{2}q$ et $\mathcal{L}_c = -1 + \lambda$. Les conditions premières sont alors

$$\lambda\frac{1}{2}q = p \qquad \lambda = 1$$

ce qui conduit à la condition

$$\frac{1}{2}q = p$$

connue plus classiquement sous la forme : coût marginal $=$ prix. La solution q, c satisfait donc le système

$$\begin{cases} q &= 2p \\ c &= \frac{1}{4}q^2 \end{cases} \iff \begin{cases} q &= 2p \\ c &= p^2 \end{cases}$$

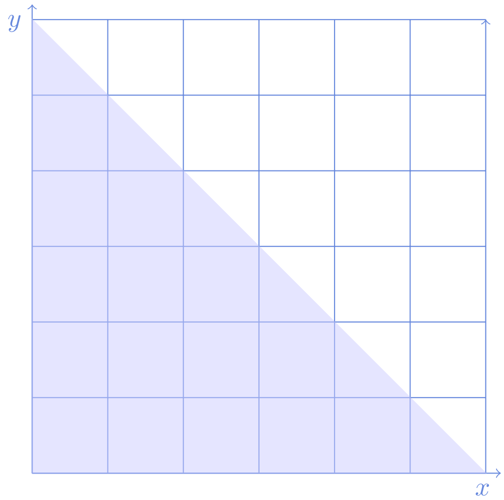
2) Comparer les conditions que vous avez obtenues avec la méthode du Lagrangien, avec les conditions premières que vous auriez pu écrire directement.

2 Reprise du programme classique du consommateur

Soit le programme $\max_{x,y}\ xy\ s.c. x + y \leq 6$. Pour conserver la notation du TD, on note $f = xy$ $g = 6 - x - y$.

1) Tracer la contrainte $\{x + y \leq 6\}$ dans un espace à deux dimensions.

L'interprétation de cette contrainte est classique : c'est la contrainte budgétaire d'un ménage qui dispose d'un revenu 6 à répartir entre l'achat de deux biens, le premier en quantité x au prix de 1, le second en quantité y au prix de 1, son tracé est



2) Calculer f_x, f_y, g_x et g_y, puis écrire la FOC.

$f_x = y$**,** $f_y = x$**,** $g_x = 1$ **et** $g_y = 1$ **d'où la FOC :**

$$\frac{y}{1} = \frac{x}{1} \quad \Longleftrightarrow \quad x = y$$

3) Montrer que la contrainte est saturée.

Si la contrainte n'est pas saturée, cad si $x + y < 6$, alors, on pourrait un peu augmenter x , ce qui permettrait d'augmenter l'objectif poursuivi, sans violer la contrainte, une contradiction

4) Déduire des deux questions précédentes que la solution au programme est $x = y = 3$

des deux équations $x = y$ et $x + y = 6$ on déduit (par exemple, par substitution) que $x = y = 3$.

Considérons maintenant le programme $\max_{x,y} xy + \lambda(6 - x - y)$. On note $\mathcal{L} = xy + \lambda(6 - x - y)$

5) Calculer $\mathcal{L}_x$, $\mathcal{L}_y$, $\mathcal{L}_\lambda$, puis écrire les conditions premières

$\mathcal{L}_x = y - \lambda$

$\mathcal{L}_y = x - \lambda$

$\mathcal{L}_\lambda = 6 - x - y$

Les conditions premières sont

$$y = \lambda \quad x = \lambda \quad x + y = 6$$

6) Trouver une solution aux conditions premières

partons de $x = y = \lambda$ et utilisons cette condition dans la troisième condition première : $\lambda + \lambda = 6$. On trouve $\lambda = 3$, $x = y = 3$.

7) Calculer $\mathcal{L}_{xx}$ et $\mathcal{L}_{yy}$, $\mathcal{L}_{xy}$, $\Delta = \mathcal{L}_{xx}\mathcal{L}_{yy} - (\mathcal{L}_{xy})^2$ et dire si $\mathcal{L}$ concave.

$\mathcal{L}_{xx} = 0$

$\mathcal{L}_{yy} = 0$

$\mathcal{L}_{xy} = 1$

Delta=-1. Manifestement $\mathcal{L}$ n'est pas concave, ce qui est souvent le cas en Gestion

8) Montrer que f et g sont quasi-concaves et conclure.

Les courbes de niveau $f = cste$ sont décroissantes (puisque de pente $-f_x/f_y < 0$) et par ailleurs le long d'une de ces courbes x augmente et y diminue, ce qui fait que $f_x = y$ diminue et $f_y = x$ augmente, ce qui conduit à f_x/f_y diminue. La pente diminuant, la courbe de niveau est convexe, et donc f est quasi-concave

La contrainte budgétaire $g(x, y) = 0$ est une droite, donc quasi-concave par définition

Le graphique du problème de maximisation est le graphique standard, ce qui montre que la solution des conditions premières est bien le maximum de la fonction