

Les savoirs à revoir pour ce TD : le maniement des équations de toutes sortes, plus particulièrement les relations linéaires, la résolution de systèmes d'équations, la reconnaissance des propriétés des variables représentées par ces équations (spécifiquement la corrélation des variables).

<p>Une équation d'une variable (dans \mathbb{R}) est une définition implicite d'un nombre qu'on note souvent x; on appelle solution tout nombre qui vérifie l'équation. Une équation peut avoir une ou plusieurs solutions. <u>Deux équations sont équivalentes dès lors qu'elles définissent exactement le même ensemble de solutions.</u> Certaines fois, deux équations sont équivalentes quand on peut leur appliquer une règle de transformation croissante $A = B$ équivaud à $f(A) = f(B)$ lorsque $f(\cdot)$ est croissante.</p>	<p>On dit que deux variables qui sont conjointement définies par une équation sont <i>corrélées</i>, lorsqu'il est nécessaire que la deuxième variable augmente, quand la première variable augmente tout en respectant que l'équation demeure vérifiée. Dans le cas contraire, on parlera de <i>variables corrélées négativement</i>. Par exemple, dans une équation de deux de type $f(p, q) = 0$, on peut calculer $\frac{\partial f}{\partial p}$ et $\frac{\partial f}{\partial q}$. <u>Les deux variables sont positivement corrélées si les deux dérivées sont de signe opposé, et négativement corrélées si les deux dérivées sont de même signe.</u></p>	<p>On dit qu'une équation $C = D$ est une conséquence de l'équation $A = B$ si l'ensemble des variables de l'équation $C = D$ est inclus dans l'ensemble des variables de l'équation $A = B$, et si les solutions de l'équation $C = D$ correspondent aux solutions de l'équation $A = B$.</p>
---	--	--

1 Équations avec une ou deux variables

- 1) Résoudre les différentes équations du premier et du second degré suivantes, avec $a \in \mathbb{R}$:

$$x - a = \pi \quad y + 3 = 12 \quad y^2 - 2y + a = 0 \quad x - a = 2y + a \quad x^2 + x + 1 = 0 \quad \frac{1}{4}x^2 - 5x + 9 = 0$$

On trouve

$$x = a + \pi \quad y = 9 \quad y = 1 \pm \sqrt{1 - a} \text{ (si } a < 1) \quad x - 2y = 2a \quad S = \emptyset \quad x = (5 \pm 4) * 2$$

Car $y^2 - 2y + a = (y - 1)^2 + (a - 1)$ ce qui équivaut à $(y - 1)^2 = 1 - a$, équation qui n'a de solution que lorsque $a < 1$, la solution étant telle que $y - 1 = \pm\sqrt{1 - a}$

- 2) Dire si les équations suivantes sont équivalentes ou non

$$\begin{array}{l}
 2x = y + \frac{1}{y} \qquad 2x = y + 1/y \qquad \ln x = \ln y \\
 \iff xy = y + 1 \qquad \iff y = x + \sqrt{x^2 - 1} \qquad x = y \\
 \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2(L + \ell) \\ xy = L\ell \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - 16}}{4} \\ y = \frac{\ell - \sqrt{\ell^2 - 16}}{4} \end{array} \right.
 \end{array}$$

- Prenons l'équation $2x = y + \frac{1}{y}$. Si on la multiplie par y à droite et à gauche, elle devient $2xy = y^2 + 1$, ce qui n'a rien à voir avec $xy = y + 1$

- Prenons l'équation $2x = y + \frac{1}{y}$. En multipliant par y et en soustrayant à droite et à gauche $2xy$ cette équation devient $y^2 - 2xy + 1 = 0$ qu'on peut encore écrire $y^2 - 2xy + X^2 + 1 - x^2 = (y - x)^2 + 1 - x^2 = 0$, soit $(y - x)^2 = x^2 - 1$. Cette égalité n'est possible que quand le membre de droite est positif, cad quand $x \geq 1$ ou $x \leq -1$. On a alors $y - x = \pm\sqrt{x^2 - 1}$, soit, $y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$. L'équivalence n'est pas tout à fait vraie, il manque au moins une solution.

- Prenons l'équation $\ln x = \ln y$. Si on calcule de part et d'autre l'exponentielle du membre de droite et du membre de gauche, on trouve $x = y$. Cependant, là encore, il n'y a pas d'équivalence, car on ne peut pas faire le. Chemin inverse, si par exemple x et y sont négatifs.

Prenons le système d'équations $\begin{cases} x = \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - 16}}{4} \\ y = \frac{\ell - \sqrt{\ell^2 - 16}}{4} \end{cases}$, if we compute $x + y$ we find $2\ell/4 = \ell/2$, that is enough to say that the two systems are different.

2 Analyse d'équations avec une variable

1) Donner le nombre de solutions des équations suivantes, sans nécessairement les calculer.

$$x^2 + 1 = 0 \quad x^2 + 2x + 1 = 0 \quad x^2 + 7x + 1 = 0 \quad x^2 + kx + 1 = 0 \quad \text{avec } k > 2$$

L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution, car, le nombre $x^2 + 1 \geq 1$ ne peut pas être égal à zéro.

L'équation $x^2 + 2x + 1 = 0$ a une unique solution, car, on peut la réécrire sous la forme $(x + 1)^2 = 0$ dont l'unique solution est $x = -1$.

L'équation $x^2 + 7x + 1 = 0$ a au moins deux solutions. En effet, l'expression $F = x^2 + 7x + 1$ est positive en $x = 0$ et en $x = -5$ (où F vaut respectivement 1 et 9) et est négative en $x = -1$ ($F(-1) = -5$). Aussi, on sait qu'il y a un nombre qui annule F entre -5 et -1, et un autre nombre qui annule F entre -1 et 0. Comme par ailleurs F est un trinôme, il n'y a pas plus de deux solutions.

L'équation $x^2 + kx + 1 = 0$ a pour déterminant $\Delta = k^2 - 4 * 1 * 1 = k^2 - 4 = (k - 2)(k + 2) > 0$. Le déterminant étant positif par hypothèse, l'équation a deux solutions.

2) Indiquer parmi les équations suivantes celles qui sont équivalentes entre-elles, cad que malgré une forme différente, elles définissent exactement le même nombre de solutions

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 = 0 & \quad x = 1 & \quad x - 1 = 0 & \quad e^x = e & \quad \ln(x) - 1 = 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 & \quad \sqrt{x} = 1 & \quad x^3 + x^2 + x = 0 & \quad e^x = 1 & \quad x \ln(x) = 0 \end{aligned}$$

<p>Première famille</p> <p>Ensemble des solutions :</p> <p>$X = \{1\}$</p>	$(x - 1)^2 = 0$ $x - 1 = 0$ $e^{x-1} = 1$ $\ln(x) - 1 = 0$ $\sqrt{x} = 1$ $x \ln(x) = 0$	<p>Toutes ces équations ont en commun que seul $x = 1$ les satisfait. Attention, pour la dernière de ces équations, on peut avoir une interprétation différente. En effet, il est possible de montrer que $x \ln(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, ce qui laisserait à penser que $x = 0$ pourrait bien être considéré comme une seconde solution de cette dernière équation.</p>
<p>Seconde famille</p> <p>Ensemble des solutions :</p> <p>$X = \{-1\}$</p>	$(x + 1)^2 = 0$	<p>Toutes ces équations ont en commun que seul $x = -1$ les satisfait.</p>
<p>Troisième famille</p> <p>Ensemble des solutions :</p> <p>$X = \{0\}$</p>	$x(x^2 + x + 1) = 0$ $e^x = e^0$	<p>Toutes ces équations ont en commun que seul $x = 0$ les satisfait.</p>

3) En reprenant les équations précédentes, en les regroupant « par famille » (où une famille d'équation désigne des équations équivalentes, définissant exactement les mêmes solutions), indiquer combien il y a de familles.

Formellement 3, mais la réponse 4 me va aussi, en considérant comme à part l'équation $x \ln(x) = 0$.

3 Variables en lien croissant (corrélées), variables en lien décroissant (corrélées -nt)

Sur tout l'exercice, on suppose $p \geq 0$ et $q \geq 0$.

1) Dire pour les équations suivantes si les variables p et q sont corrélées, corrélées négativement, ou pas du tout corrélées, ni positivement, ni négativement. On demande de ne pas résoudre les équations, juste de donner une intuition de la chose.

$$pq = 10 \quad p + q = 10 \quad pq = p + q \quad \frac{p+q}{pq} = 1 \quad p^2 + q = 1$$

$$p\sqrt{q} + q\sqrt{p} = 1 \quad \ln(p) + q^{3/4} = 20 \quad q = \frac{p}{p+q} \quad p = q \quad \frac{p - C'(q)}{p} = \frac{1}{\varepsilon}, \text{ avec } C'(q) > 0$$

Quand p augmente, q doit diminuer pour que l'équation reste vraie. Cette règle apparaît de manière évidente pour les équations $pq = 10$, $p + q = 10$, $p^2 + q = 1$, $\ln(p) + q^{3/4} = 20$ car les expressions correspondantes sont croissantes à la fois en p et en q .

Quand p augmente, q doit augmenter pour que l'équation reste vraie. Cette règle apparaît de manière évidente pour l'équation $\frac{p - C'(q)}{p} = 1 - \frac{C'(q)}{p} = \frac{1}{\varepsilon}$ car l'expression $\frac{C'(q)}{p}$ est croissante avec q et décroissante avec p .

Pour tous les autres cas, on se rapporte à la résolution (plus systématique) de la question 2

2) En reprenant et en réécrivant les équations précédentes sous la forme $f(p, q) = 0$, calculer $\frac{\partial f}{\partial p}$ et $\frac{\partial f}{\partial q}$, puis, en conclure, si les variables sont ou non corrélées (vérifier ce que vous avez pu dire dans la question précédente). IL EST POSSIBLE QUE POUR CERTAINS DES CAS CONSIDERES, IL SOIT NECESSAIRE DE POUSSER UN PEU PLUS L'ANALYSE, AVANT D'ARRIVER A UNE CONCLUSION.

Equation $pq = 10$ on a $f = pq - 10$, $\frac{\partial f}{\partial p} = q \geq 0$, $\frac{\partial f}{\partial q} = p \geq 0$, ces deux dérivées sont de même signe, et donc, les deux variables p et q sont corrélées négativement

Equation $p + q = 10$ on a $f = p + q - 10$, $\frac{\partial f}{\partial p} = 1 \geq 0$, $\frac{\partial f}{\partial q} = 1 \geq 0$, ces deux dérivées sont de même signe, et donc, les deux variables p et q sont corrélées négativement

Equation $pq = p + q$ on a $f = pq - p - q$, $\frac{\partial f}{\partial p} = q - 1 \geq 0$, $\frac{\partial f}{\partial q} = p - 1 \geq 0$, a priori, ces deux dérivées pourraient ne pas être de même signe, quand $p \geq 1$ et $q \leq 1$ par exemple.

Ici, cependant, en poussant un peu plus loin l'analyse, on remarque que :

$$\frac{\partial f}{\partial p} * \frac{\partial f}{\partial q} = (p-1)(q-1) = pq - p - q + 1 = 0 + 1 = 1,$$

où l'on a utilisé la condition qui définit implicitement p et q . Il en résulte que les deux dérivées sont de même signe, et donc, les deux variables p et q sont corrélées négativement

Equation $\frac{p+q}{pq} = 1$ on a $f = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1$, $\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{-1}{p^2} \leq 0$, $\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{-1}{q^2} \leq 0$, ces deux dérivées sont de même signe, et donc, les deux variables p et q sont corrélées négativement

Equation $p^2 + q = 1$ on a $f = p^2 + q - 1$, $\frac{\partial f}{\partial p} = 2p \geq 0$, $\frac{\partial f}{\partial q} = 1 \geq 0$, ces deux dérivées sont de même signe, et donc, les deux variables p et q sont corrélées négativement

Equation $p\sqrt{q} + q\sqrt{p} = 1$ on a $f = p\sqrt{q} + q\sqrt{p} - 1$, $\frac{\partial f}{\partial p} = \sqrt{q} - q\sqrt{p} = \sqrt{q} \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{p}}\right)$, expression qui est négative quand $q \geq 4p$. Pareillement, $\frac{\partial f}{\partial q} = \sqrt{p} - p\sqrt{q} = \sqrt{p} \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$, expression qui est négative quand $p \geq 4q$. Ces deux dérivées sont donc parfois de même signe, et parfois de

signe opposés, on ne peut pas en conclure d'un point de vue général que les deux variables p et q sont corrélées, positivement ou négativement.

Equation $\ln(p) + q^{3/4} = 20$ on a $f = \ln(p) + q^{3/4} - 20$, $\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{1}{p} \geq 0$, $\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{3}{4}q^{-1/4} \geq 0$, ces deux dérivées sont de même signe, et donc, les deux variables p et q sont corrélées négativement.

Equation $q = \frac{p}{p+q}$ on a $f = q - \frac{p}{p+q} = q - 1 - \frac{q}{p+q}$, $\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{-q}{(p+q)^2} \leq 0$, $\frac{\partial f}{\partial q} = 1 - \frac{-p}{(p+q)^2} \geq 0$, ces deux dérivées sont de signe opposé, et donc, les deux variables p et q sont corrélées positivement

Equation $p = q$ on a $f = p - q$, $\frac{\partial f}{\partial p} = 1 \geq 0$, $\frac{\partial f}{\partial q} = -1 \geq 0$, ces deux dérivées sont de signe opposé, et donc, les deux variables p et q sont corrélées positivement

Equation $\frac{p - C'(q)}{p} = \frac{1}{\varepsilon}$ on a $f = 1 - \frac{C'(q)}{p} - \frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{-C'(q)}{p^2} \leq 0$, $\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{C''(q)}{p} \geq 0$, ces deux dérivées sont de signe opposé, et donc, les deux variables p et q sont corrélées positivement.

4 Propriétés conséquentes (et nécessaires) d'une équation

On dit qu'une équation $A = B$ implique une équation $C = D$ si l'ensemble des variables de la seconde équation est inclus dans l'ensemble des variables de la première équation, et si les solutions de la seconde équation correspondent aux solutions de la première équation.

1) Dire quelles sont les implications qui sont justes (et justifier pourquoi, sans nécessairement calculer les solutions).

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x - y = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y = 6 \\ 4x - y = 11 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y = 6 \\ 6x - 2y = 12 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases}$$

La séquence $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x - y = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases}$ est FAUSSE car il n'est pas vrai que $3 * 5 + 9 = 5!$

La séquence $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 4x - y = 11 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases}$ est VRAIE car $3 * 5 - 9 = 6$ et $4 * 5 - 9 = 11!$

La séquence $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 6x - 2y = 11 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases}$ est FAUSSE bien que $3 * 5 - 9 = 6$ et $6 * 5 - 2 * 9 = 12$.

En effet, les deux premières équations sont proportionnelles, et il y a bien d'autres solutions admissibles, par exemple $x = 2$ et $y = 0!$

2) Dire quelles sont les implications qui sont justes (et justifier pourquoi, sans nécessairement calculer les solutions). On suppose dans cette question $p \geq 0$ et $q \geq 0$.

$$\begin{aligned} (p + q = pq \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1) \quad (p^2 + q = 1 \implies q^2 + p = 1) \quad (q = 100 - p \implies p = 100 - q) \\ (q = 120/p \implies p = 120/q) \quad (\frac{p}{q} + \frac{p}{q} = 2 \implies p = q = 1) \quad (\frac{p}{q} + \frac{p}{q} \geq 2 \implies p = q = 1) \end{aligned}$$

JUSTE : $(p + q = pq \implies \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$. Pour obtenir la seconde équation, on a divisé le membre de gauche et le membre de droite par la quantité pq .

FAUSSE : $(p^2 + q = 1 \implies q^2 + p = 1)$. En effet, $p = 1$, $q = -1$ est solution de l'équation de gauche, mais n'est pas solution de l'équation de droite.

JUSTE : $(q = 100 - p \implies p = 100 - q)$. Pour l'obtenir, on ajouté la quantité q à droite et à gauche, et on a retranché p à droite et à gauche. En fait, l'opération que l'on a faite est assez classique. On a inversé une fonction $q = q(p)$ et obtenu une relation de p en fonction de q .

JUSTE : ($q = 120/p \implies p = 120/q$). Pour l'obtenir, on multiplie la quantité p à droite et à gauche, et on a divisé q à droite et à gauche. En fait, l'opération que l'on a faite est assez classique. On a inversé une fonction $q = q(p)$ et obtenu une relation de p en fonction de q .

JUSTE : ($\frac{p}{q} + \frac{p}{q} = 2 \implies p = q = 1$). En effet, on doit remarquer en préalable que l'expression de gauche est supérieure ou égale à deux, car c et la somme d'un nombre et de son inverse. L'égalité à deux est obtenue uniquement quand le nombre égale son inverse à savoir ici quand $p/q = q/p$ c'est-à-dire quand $p = q = 1$. Il faut en fait un peu de savoir pour résoudre cette question, néanmoins classique.

FAUSSE : ($\frac{p}{q} + \frac{p}{q} \geq 2 \implies p = q = 1$). En effet, le membre de gauche, comme on vient de l'expliquer est toujours supérieur ou égal à deux. + Donc cela n'implique pas que nécessairement $p = q = 1$.

3) Jean et Paul désirent acheter en commun un lecteur de CD qui coûte 200 €. Les économies de Paul représentent les $\frac{4}{5}$ de celles de Jean, et s'ils réunissent leurs économies, il leur manque 27,2 € pour pouvoir effectuer leur achat. La séquence logique suivante est-elle correcte ?

$$\text{ÉNONCÉ} \iff \begin{cases} y_P + y_J = 200 - 27,2 \\ y_P = \frac{4}{5}y_J \end{cases} \implies y_J = 96$$

Notons y_J et y_P les montants respectifs des économies de Jean et de Paul. On a $y_J + y_P = 200 - 27,2 = 172,8$ et par ailleurs, $y_P = \frac{4}{5}y_J$. Donc l'énoncé s'écrit bien

$$\begin{cases} y_P + y_J = 200 - 27,2 \\ y_P = \frac{4}{5}y_J \end{cases}$$

Ici, c'est la méthode de substitution qui est directement suggérée pour résoudre. On substitue donc y_P dans la première équation, on a $y_J + \frac{4}{5}y_J = 172,8$, soit $\frac{9}{5}y_J = 172,8$, soit $y_J = 172,8 * 5/9 = 96$ et $y_P = 76,8$. L'implication $y_J = 96$ est donc VRAIE.

5 Proportionnalité, liaison affine, inverse proportionnalité

1) Les grandeurs données dans chacun des quatre tableaux ci-dessous sont-elles proportionnelles, en liaison affine ou inversement proportionnelles ?

u	3	10	13
v	0,24	0,64	0,88

r	7	15	20
q	2,5	4,9	6,4

K	4	7	12
L	4	7	28

z	4	9	11
w	40	15	12

Dans cet exercice, il faut exercer le regard des étudiants, commencer par les remarques les plus élémentaires, jusqu'à faire les calculs les plus précis.

Il faut commencer par regarder s'il y a une corrélation positive ou négative ou non. Dans le cas u, v, r, q et K, L corrélation positive, dans le cas z, w corrélation négative. Pas besoin de calcul à cette étape

Il est toujours meilleur de répondre aux questions de ce type en cascade. On étudie donc en premier la proportionnalité.

Proportionnalité dans le cas u, v D'abord trouver des indices. On a $13=10+3$ et $0,24+0,64=0,88$; cela pourrait indiquer la proportionnalité. On la vérifie en rajoutant au tableau u, v la ligne v/u

u	3	10	13
v	0,24	0,64	0,88
v/u	0,08	0,064	-

Clairement, il n'y a pas de proportionnalité (on a pas rempli le tableau jusqu'au bout).

Lien affine dans le cas u, v on calcule alors le coefficient de variation pour aller du premier au second, et le coefficient de variation pour aller du premier au troisième :

$$\tau_{5 \rightarrow 10} = (0,64 - 0,24)/(10 - 5) = 0,08 \quad \tau_{5 \rightarrow 13} = (0,88 - 0,24)/(13 - 5) = 0,64/7 = (0,64/8) * (8/7) = 0,08 * (8/7)$$

Clairement, il n'y a pas de lien affine.

On a le droit d'utiliser un tableur, afin de faire une macro pour calculer ces taux

On trouve alors pour les variables r, q qu'elles sont en lien affine :

TEXTE	A	B	C	D	E
		P1	p2	P3	
r		7	15	20	
q		2,5	4,9	6,4	
		P1 à P2		0,3	P1 à p3
					= (D3-B3)/(D2-B2)

D6	A	B	C	D	E
		P1	p2	P3	
r		7	15	20	
q		2,5	4,9	6,4	
		P1 à P2		0,3	P1 à p3
					0,3

les taux étant égaux à 0,3

Pareillement, on voit qu'il n'y a pas de relation affine entre K et L et entre z et w :

	P1	p2	P3	
K	4	7	12	
L	4	7	28	
	P1 à P2		1	P1 à p3
				3

	P1	p2	P3	
z	4	9	11	
w	40	15	12	
	P1 à P2		-5	P1 à p3
				-4