

Dans tout le TD nous analysons le comportement de plusieurs firmes qui produisent un bien en quantité y . Ces firmes sont caractérisées,

Soit par la fonction de coût $C(y)$ qui désigne le coût de la firme pour produire la quantité y ;

Soit par leur technologie qui décrit comment une quantité y de bien est produite à partir d'une quantité x d'input.

On notera le prix de l'output p et le prix de l'input w . Le profit de la firme correspondant au plan de production (x, y) est donc $\pi = py - wx$.

1 Firmes dont on connaît la fonction de coût

Considérons les trois firmes suivantes, chacune caractérisée par une fonction de coût $C(y)$:

$$\begin{array}{ll} A & : \quad C(y) = wy^2 \\ C & : \quad C(y) = w\frac{y}{2-y} \end{array} \quad \begin{array}{l} B & : \quad C(y) = wy^3 \\ & \text{avec l'hypothèse } y \leq 2 \end{array}$$

1) Pour chacune de ces firmes écrire le programme de la firme en CPP

$$\begin{array}{ll} A & : \quad \max_y py - wy^2 \\ C & : \quad \max_y py - w\frac{y}{2-y} \end{array} \quad \begin{array}{l} B & : \quad \max_y py - wy^3 \\ & \text{avec l'hypothèse } y \leq 2 \end{array}$$

2) Pour chacune de ces firmes décrire le comportement de la firme en CPP

Pour chacune des firmes on écrit la FOC, on vérifie les conditions secondes, et on conclue, ou on développe un complément d'analyse suivant le cas. Enfin, on n'oublie pas la dernière vérification à savoir si le profit obtenu est positif ou non

Firme A $\pi(y) = py - wy^2$; $\pi'(y) = p - 2wy$; $\pi''(y) = -2w < 0$; la fonction de profit est concave, la FOC, si elle donne une condition conduit au maximum du profit. FOC : $p = 2wy$ soit $y = \frac{1}{2}\frac{p}{w}$; le profit est alors $\pi = \frac{1}{2}\frac{p^2}{w} - \frac{1}{4}\frac{p^2}{w} = \frac{1}{4}\frac{p^2}{w} > 0$.

Firme B $\pi(y) = py - wy^3$; $\pi'(y) = p - 3wy^2$; $\pi''(y) = -6wy \leq 0$; la fonction de profit est concave, la FOC, si elle donne une condition conduit au maximum du profit. FOC : $p = 3wy^2$ soit $y = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{p}{w}}$; le profit est alors $\pi = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{p^3}{w}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\frac{p^3}{w}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\frac{p^3}{w}} > 0$.

Firme C $\pi(y) = py - w\frac{y}{2-y}$; $\pi'(y) = p - w\frac{1}{2-y} - w\frac{y}{(2-y)^2}$; $\pi''(y) = -w\frac{1}{(2-y)^2} - w\frac{1}{(2-y)^2} - 2w\frac{1}{(2-y)^3} < 0$; la fonction de profit est concave, la FOC, si elle donne une condition conduit au maximum du profit. FOC : $p = w/(2-y)$ soit $y = 2 - \frac{p}{w}$; le profit est alors $\pi = py - \frac{p}{w}wy = 0$.

On suppose que la demande sur le marché sur laquelle se trouve la firme est $D(p) = 100/p$. On rappelle que la valeur absolue de l'élasticité de la demande est, dans ce cas là, constante, égale à $\varepsilon = 1$.

3) Pour chacune de ces firmes, écrire le programme de la firme en monopole

$$\begin{array}{ll}
A & : \quad \max_{y,p} py - wy^2 \\
& \quad \text{s.c. } y \leq 100/p \\
B & : \quad \max_{y,p} py - wy^3 \\
& \quad \text{s.c. } y \leq 100/p \\
C & : \quad \max_{y,p} py - w \frac{y}{2-y} \\
& \quad \text{s.c. } y \leq \min(2, 100/p)
\end{array}$$

4) Réexpliquer pourquoi à l'optimum du monopole, on devrait avoir $q = D(p)$, en deux trois lignes

Dans le programme, on choisit p et y , à la condition que y n'est pas supérieur à la demande. On fait l'hypothèse que la firme a intérêt de produire le plus possible en respectant cette condition. D'ailleurs, si cette contrainte n'était pas saturée, on aurait le profit maximal

5) En déduire l'écriture de la fonction de profit $\pi(p)$ comme une fonction du prix, calculer $\pi'(p)$ et écrire $\pi'(p) = 0$
 $\Pi(p) = p * 100/p - C(100/p)$.

AUTRE METHODE : Etant donné que les firmes sont caractérisées par un coût fonction de la quantité, on écrit le profit comme une fonction de la quantité, en remplacementçant p par la disposition à payer la *qieme* unité produite, $p = 100/y$ ce qui conduit à une recette constante égale à 100. On a alors $\pi(y) = 100 - C(y)$. Il s'agit alors pour maximiser le profit de minimiser le coût, ce qui conduit à $y = 0$ dans les trois cas, le coût marginal étant positif (dans le cas C , $c(y) = -1 + 2/(2-y), c'(y) = 2/(2-y)^2 > 0$.) - On obtient le même résultat que par la méthode classique développée dans la question suivante. Voir le commentaire.

6) Écrire concrètement la condition optimale du monopole dont la version générale est $p - C_m = 1/\varepsilon$

Il y a une coquille dans l'énoncé : la condition optimale du monopole est : $\frac{p - C_m}{p} = 1/\varepsilon$

Pour la demande considérée dans l'exercice, la condition optimale du monopole s'écrit $\frac{p - C_m}{p} = 1$, soit $p - c_m = p, C_m = 0$: Le coût marginal du monopole doit être zéro : on est dans un cas très particulier où le monopole ne devrait pas produire plus qu'une quantité epsilonesque : il n'y a pas d'équilibre, étant donné la discontinuité en zéro. Notons cependant que comme dans les prédictions théoriques standard, le prix du monopole sera plus élevé que le coût marginal, si l'on produit très peu et que la disposition marginale à payer est $p = 100/q$ tend vers l'infini. On doit juste noter que la fonction de demande proposée n'est pas du tout réaliste.

7) Comparer ce que vous obtenez en 5) et 6)

8) Pour chacune de ces firmes, donner le comportement optimal optimal de la firme, qu'on notera (p^*, q^*)

9) Accompagner la question 8) par un bref croquis reprenant la forme de la fonction de profit dans un espace $(p, \pi(p))$

2 Comportement optimal du monopole

En 5 à six lignes, décrire comment vous analysez le comportement optimal du monopole. Vous devrez préciser

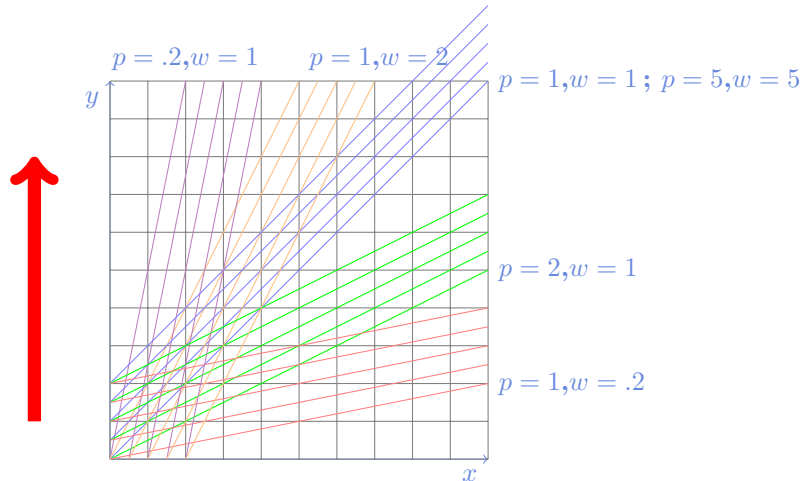
- Les informations dont vous devez disposer au départ
- La forme générale du programme du monopole
- La méthode de substitution vue en cours
- Les différentes étapes pour trouver la condition d'optimalité du monopole
- L'interprétation de la condition optimale du monopole

3 Droites d'isoprofit

1) Dans un repère x, y , tracer plusieurs droites d'isoprofit (en utilisant une couleur différente pour chaque firme), pour les conditions de prix suivantes

$$\begin{array}{lll} p = 1 & w = 1 & p = 2 \quad w = 1 \\ p = .2 & w = 1 & p = 1 \quad w = 2 \\ p = 1 & w = .2 & p = 5 \quad w = 5 \end{array}$$

Le profit s'écrit comme une fonction de la production vendue y et de l'input x : $\pi(x, y) = py - wx$



2) Indiquer dans chacun des cas dans quelle direction le profit est le plus élevé
pour tous les cas, le profit est plus élevé quand y augmente.

4 Ensemble des plans de production

Considérons les 4 firmes suivantes, chacune caractérisée par une fonction de production :

$$\begin{array}{ll} A & : \quad y = \sqrt{x} \\ B & : \quad y = x^{\frac{1}{3}} \\ C & : \quad y = 2 - \frac{2}{1+x} \\ D & : \quad y = x^2 \end{array}$$

On appelle ensemble des plans de production, l'ensemble des plans de production (x, y) réalisables par la firme c'est-à-dire l'ensemble $\{(x, y) \mid y \leq f(x)\}$.

1) Pour chacune des firmes vérifier si l'ensemble des plans de production est convexe ou non

Le plan de production est en dessous de la courbe $y = f(x)$. Une condition suffisantes (mais pas nécessaire) pour la convexité est que cette courbe $y = f(x)$ soit concave. En effet, l'ensemble la courbe $y = f(x)$ est alors convexe. Une condition pour que la fonction f soit concave est que sa dérivée seconde soit négative

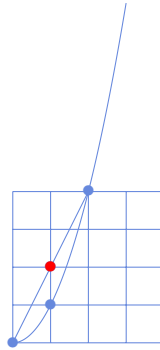
Firme A $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$, $f''(x) = -1/4\sqrt{x} < 0$, donc f concave et l'ensemble de production convexe.

Firme B $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$, donc f concave et l'ensemble de production convexe.

Firme C $f(x) = 2 - \frac{2}{1+x}$, $f'(x) = +\frac{2}{(1+x)^2}$, $f''(x) = -\frac{4}{(1+x)^3}$, donc f concave et l'ensemble de production convexe.

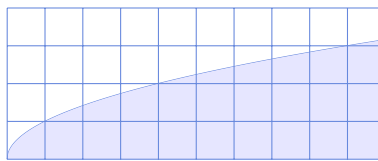
Firme D $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0$, f est convexe, donc il y a à parier que l'ensemble de production n'est pas convexe. Prenons par exemple deux plans de production $(0, 0)$ et $(2, 4)$, le milieu

de ces deux points est $I = (1, 2)$ il n'est pas dans l'ensemble de production, car quand on utilise $x = 1$, on obtient au plus, par cette technologie $y = 1 < 2$.

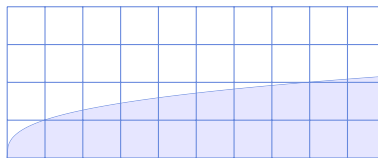


2) Pour chacune des firmes, tracer l'ensemble de production quand $x \leq 10$.

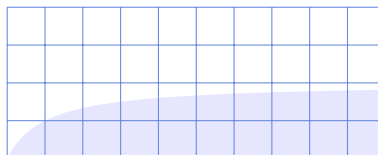
Firme A $f(x) = \sqrt{x}$,



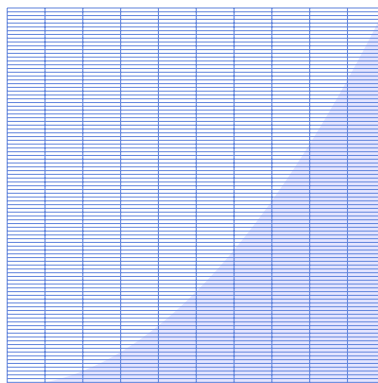
Firme B $f(x) = x^{1/3}$,



Firme C $f(x) = 2 - \frac{2}{1+x}$,



Firme D $f(x) = x^2$,



3) Pour chacune des firmes, trouver le plan optimal de production quand $p = 1$ et $w = 1$

L'énoncé ne le précise pas, on suppose implicitement que la firme est en CPP. Le profit est $\Pi = pf(x) - wx = f(x) - x$; $\Pi_x = f'(x) - 1$; $\Pi_{xx} = f''(x)$; quand la dérivée seconde est négative, comme dans

les cas A , B et C , le plan optimal de production est tel que la condition première $\Pi_x = 0$ est satisfaite, soit, ici quand $f'(x) = 1$ (cad, vieux souvenir de micro, quand la productivité marginale égale le prix relatif du facteur).

Firme A $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$, $f''(x) = -1/4\sqrt{x} < 0$, **FOC** : $2\sqrt{x} = 1$ soit $x = 1/4$, ce qui définit le maximum de production car f concave.

Firme B $f(x) = x^{1/3}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$, **FOC** : $x^{2/3} = \frac{1}{3}$ donc $x^2 = \frac{1}{27}$ et $x = 0,19245$, ce qui définit le maximum de production car f concave.

Firme C $f(x) = 2 - \frac{2}{1+x}$, $f'(x) = +\frac{2}{(1+x)^2}$, $f''(x) = -\frac{4}{(1+x)^3}$, **FOC** : $(1+X)^2 = 2$, soit $1+x = \sqrt{2}$, $x = 0,414213$, ce qui définit le maximum de production car f concave.

Firme D $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0$, on ne peut pas utiliser la FOC qui détermine un minimum local, Plus la firme produit, plus elle va faire de profit. Il n'y a donc pas de profit optimum.

4) Pour chacune des firmes, reprendre la même question quand $p = 2$ et $w = 1$

Le raisonnement identique conduit à la FOC $f'(x) = \frac{w}{p} = 0,5$. On reprend les FOC pour chacune des firmes A , B , C dont on sait qu'elle caractérise le choix optimal. On présente les résultats dans un tableau

	caractéristiques	$p = 1 ; W = 1 ; f'(x) = 1$	$p = 2 ; W = 1 ; f'(x) = \frac{1}{2}$
Firme A	$f'(x) = 1/2\sqrt{x}$, $f'' < 0$	$2\sqrt{x} = 1$, soit $x = 1/4$	$\sqrt{x} = 1$, soit $x = 1$
Firme B	$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $f'' < 0$	$x^{2/3} = \frac{1}{3}$, soit $x = \sqrt{\frac{1}{27}} = 0,19245$	$x^{2/3} = \frac{2}{3}$, soit $x = \sqrt{\frac{8}{27}} = 0,54433$
Firme C	$f'(x) = +\frac{2}{(1+x)^2}$, $f'' < 0$	$(1+X)^2 = 2$, soit $1+x = \sqrt{2}$, $x = 0,414213$	$(1+X)^2 = 4$, soit $1+x = 2$, $x = 1$

Pour la firme D , il n'y a pas de comportement optimal. Elle produirait à l'infini, et ce, quel que soit les niveaux de prix positifs envisagés.

5) Vérifier que lorsque l'on passe de $p = 1$ et $w = 1$ à $p = 2$ et $w = 1$, le plan de production optimal est plus élevé. Trouver un argument mathématique qui permette de l'expliquer.

On vérifie que le plan de production est plus élevé, en vérifiant par exemple qu'il y a plus d'inputs utilisés quand l'on passe de $p = 1$ et $w = 1$ à $p = 2$ et $w = 1$.

firme A Elle utilisait $1/4$. Désormais, 1 .

firme B Elle utilisait $\sqrt{\frac{1}{27}}$. Désormais, $\sqrt{\frac{8}{27}}$.

firme C Elle utilisait $\sqrt{2} - 1$. Désormais, 1 .

Mathématiquement dans le premier cas, la solution est caractérisée par $f'(x) = 1$ alors que dans le second cas par $f'(x) = 1/2$. Comme pour les firmes A , B et C f' est décroissante, la solution de la deuxième équation est nécessairement plus grande.

Ce raisonnement mathématique est conforme à l'intuition économique. Quand le prix de vente augmente, toutes choses égales par ailleurs, l'offre de la firme est plus élevée.

6) Même question quand $p = 2$ et $w = 2$. Comparer avec les résultats de la question 3).

Notons que quand à la fois le prix de vente et le prix de l'input augmentent dans les mêmes proportions, si le profit va augmenter dans la même proportion, le choix optimal de la firme ne bouge pas. En effet. Dans les cas des firmes A , B et C , l'équation qui caractérise le choix optimal dans la question 3 était $f'(x) = 1/1 = 1$, celle qui caractérise le choix optimal dans la question 6 est $f'(x) = 2/2 = 1$, soit la même équation (donc les mêmes solutions).

OK

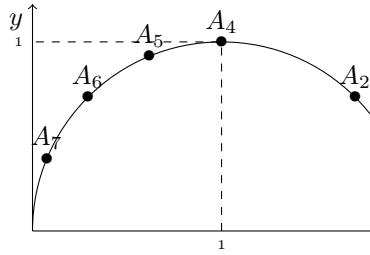
OK

OK

5 Conditions pour un plan de production optimum

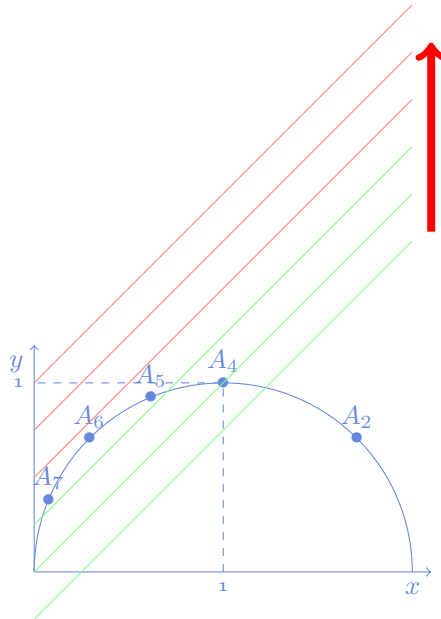
Soit une firme dont l'ensemble des points de production est représenté ci-contre, La frontière étant un demi-cercle centré en $(1,0)$ de 1 cm de diamètre. On considère plusieurs plans de production sur cette frontière : $A_4 = (1, 1)$

$$A_6 = (1 - \sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad A_5 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad A_2 = (1 + \sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad A_7 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



- 1) Dire lequel des plans de production est optimum lorsque $p = w = 1$
- 2) dire pour chacun de ces points, les conditions sur les prix p et w pour que le point considéré corresponde au choix optimal de la firme.

1) Dans l'espace x, y une droite d'isoprofit est d'équation $py - wx = \pi$, c'est une droite croissante de pente $\frac{w}{p}$



Dans un cas comme cela, lorsque l'on veut maximiser le profit, il faut trouver la droite d'isoprofit la plus haute, qui soit compatible avec la contrainte technologique (celles représentées en vert, celles qui sont représentées en rouge sont au-delà de la frontière technologique) \Rightarrow DONC, on cherche en fait la droite d'isoprofit, de pente 1, qui est tangente au demi-cercle centré en $(1,0)$ de 1cm de diamètre.

On se doute que c'est le point A_6

Pour le vérifier, on peut calculer la pente du cercle au point A_6 . Le cercle a pour équation $(x-1)^2 + y^2 = 1$, la pente au point de coordonnée (x, y) est $TMS = -\frac{2(x-1)}{2y}$. Au point A_6 la pente est $TMS = \frac{2(x-1)}{2y} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$, CQFD

2) Les seuls points qui peuvent être optimaux sont A_7, A_6, A_5 et A_4 , les autres points étant tous dominés par A_4 .

Pour que le point A_i soit le choix optimal de la firme Il faut que le TMS en A_i égale w/p .

Pour A_7 , $TMS = \frac{\sqrt{3}/3}{1/2} = 2\sqrt{3}/3$. La condition est $w/p = 2\sqrt{3}/3$.

Pour A_6 , on a vu que $w/p = 1$ était la condition.

Pour A_5 , $TMS = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \sqrt{3}/3$. La condition est $w/p = \sqrt{3}/3$.

Pour A_4 , $TMS=0$. La condition est $w = 0$. Cette condition n'est jamais vérifiée dans un contexte économique .