

1 Fractions

1) Décomposer en somme d'inverses distincts d'entiers naturels distincts les fractions suivantes :

$$3/4 \quad 99/100 \quad 7/10 \quad 2/3 \quad 1 \quad 5/7$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ \frac{99}{100} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} \\ \frac{7}{10} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \\ 1 &= \frac{1}{1} \\ \frac{5}{7} &= \end{aligned}$$

2) Simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \quad a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + 1}}}$$

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{10+9}{3+2} = \frac{19}{5} * \frac{6}{5} = \frac{19}{5} * \frac{2}{5} = \frac{36}{25}$$

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 a_3 + a_2 + 1}} &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 a_3 + a_2 + 1}} = a_0 + \frac{1}{\frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 + a_1 + a_3 + 1}{a_2 a_3 + a_2 + 1}} = a_0 + \frac{a_2 a_3 + a_2 + 1}{a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 + a_1 + a_3 + 1} \\ &= \frac{a_0 a_1 a_2 a_3 + a_0 a_1 a_2 + a_0 a_1 + a_0 a_3 + a_0 + a_2 a_3 + a_2 + 1}{a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 + a_1 + a_3 + 1} \end{aligned}$$

3) Résoudre les problèmes que l'on retrouve dans des archives historiques à Babylone, au Moyen-âge en Europe et en Chine. Précisez en particulier l'appartenance du nombre trouvé aux ensembles \mathbb{N} , \mathbb{D} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} .

a) J'ai trouvé une pierre mais je ne l'ai pas pesée. Après lui avoir ajouté un septième de son poids et avoir ajouté un onzième du résultat, j'ai pesé le tout et j'ai trouvé : 1 ma-na [unité de masse]. Quel était à l'origine le poids de la pierre ? (problème babylonien, tablette YBC 4652, problème 7)

Notons p le poids de la pierre. On a $\frac{8}{7}p * \frac{12}{11} = 1$. D'où $p = \frac{7}{8} \frac{11}{12} = \frac{77}{96} \in \mathbb{Q}$

b) Un nombre augmenté de son septième donne 19. Quel est ce nombre ? (papyrus Rhind, problème 24)

On a $\frac{8}{7}x = 19$, ce qui donne $x = \frac{19*7}{8} = \frac{133}{8} \in \mathbb{Q}$

c) Un nombre augmenté de son quart donne 15. Quel est ce nombre ? (papyrus Rhind, problème 26)

On a $\frac{5}{4} * x = 15$, d'où $x = 15 * \frac{4}{5} = 3 * 4 = 12 \in \mathbb{N}$.

d) Supposons que l'on ait 9 tiges d'or jaune et 11 tiges d'argent blanc qui, à la pesée, ont des poids tout juste égaux. Si l'on échange entre elles une de leurs tiges, l'or devient plus léger de 13 liang [unité de masse]. On demande combien pèsent respectivement une tige d'or et une tige d'argent. (Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique, problème 7.17)

Notons O le poids d'une tige d'or et A le poids d'une tige d'argent blanc. On nous dit tout d'abord que $9O = 11A$. Puis $8O + A = 10A + O - 13$. C'est un système de deux équations à deux inconnues. La première équation, on la réécrit $O = \frac{11}{9}A$. La seconde équation, qu'on a réécrit $9A - 7O = 13$ se réécrit : $9A - 7 * \frac{11}{9}A = 13$ ou encore $\frac{81-77}{9}A = 13$, $\frac{4}{9}A = 13$, $A = 13 * \frac{9}{4} = \frac{117}{4}$

- e) Une lance a la moitié et le tiers dans l'eau et neuf paumes à l'extérieur. Je te demande combien elle a de long. (problème médiéval)

On a $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Neuf paumes font $\frac{1}{6}$. La longueur totale est donc $6 * 9 = 54$.

2 Pourcentages

- 1) Dans une assemblée de 50 personnes, il y a 31 femmes. Quel est le pourcentage des femmes dans cette assemblée ?

La proportion de femmes est $\frac{31}{50} = \frac{62}{100} = 62\%$

- 2) Si une assemblée de 120 personnes compte 15 % de femmes, combien y-a-t'il de femmes dans cette assemblée ?

Le nombre de femmes est $15\% * 120 = \frac{15}{100} * 120 = \frac{15}{5} * 6 = 3 * 6 = 18$

- 3) Le prix hors taxes d'un objet est 120 €. Le taux de TVA est de 5 %. Calculer la TVA et le prix TTC.

la TVA est $5\% * 120 = \frac{5}{100} * 120 = \frac{5*20}{100} * 6 = 6$

- 4) Le prix TTC d'un objet est de 198 €. Le taux de TVA est de 20 %. Calculer la TVA et le prix HT.

On a $1,2HT = 198$, qu'on peut aussi écrire $\frac{120}{100}HT = 198$ dont on déduit $HT = \frac{198*100}{120} = \frac{198*5}{6} = \frac{99*5}{3} = 33 * 5 = 165$. On en déduit $TVA = 198 - 165 = 33$.

- 5) Après une remise de 15 % le prix d'un objet n'est plus que de 34 €. Calculer le prix initial de l'objet.

On a $\frac{85}{100}p = 34$ dont on déduit : $p = 3400/85 = 40$

- 6) Un article étiqueté 120€ est soldé à 100 €. La remise est-elle de 20%? OUI NON

NON car $120 - 24 = 96$

- 7) Dans une population de 450 personnes, une enquête a montré que 60% sont des femmes et que 70% des femmes aiment le chocolat. Combien y a-t'il de femmes qui aiment le chocolat ? Quelle est leur proportion ? Il y a $\frac{6}{10} * 450 = 6 * 45 = 270$ femmes dans la population, et $\frac{7}{10} * 270 = 7 * 27 = 189$ femmes qui aiment le chocolat. La proportion de ces 189 femmes dans la population est

$\frac{6}{10} * \frac{7}{10} = 42\%$.

- 8) Augmenter de 250% une valeur revient à multiplier celle-ci par 3,50? OUI NON

OUI car $1 + 250\% = 1 + 2,5 = 3,5$

- 9) si l'altitude d'un plan incliné varie d'un centimètre par mètre parcouru horizontalement, on dit que la pente est de 1 % : *Interpréter* ; CAD, pourquoi on utilise la notion de pourcentage en topographie ?

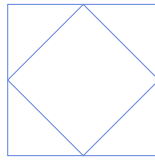
3 Racine de deux

- 1) Après avoir redonné la définition du nombre $\sqrt{2}$, montrer que la diagonale d'un carré de longueur 1 est justement $\sqrt{2}$. L'étudiant aura le loisir d'utiliser tout moyen formel qui lui plaît, un graphique, une équation ou une rédaction.

On peut invoquer le théorème de Pythagore, on a $1^2 + 1^2 = D^2$, où D est la diagonale, cad $D^2 = 2$, et par définition $D = \sqrt{2}$

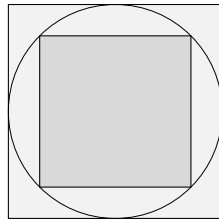
On peut aussi regarder le carré dans le carré, comme dans la figure suivante. Par convention

on dit que le petit carré est de longueur 1. La longueur du grand carré est exactement la diagonale du petit carré.



Or on se convainc assez vite que la surface du grand carré est deux fois la surface du petit carré (imaginez un pliage). On a alors $D * D = 2 * 1 * 1$ d'où $D^2 = 2$ et $D = \sqrt{2}$.

2) Il est en outre possible, à l'aide d'un cercle, de dupliquer un carré en un autre carré du double de sa surface sans en changer l'orientation. Dans la figure ci-dessous le grand carré a une surface double du petit carré. Il suffit en effet de faire pivoter le petit carré d'un huitième de tour pour retrouver la figure précédente.



Montrer formellement en deux trois phrases pourquoi le rapport des côtés des deux carrés est de $\sqrt{2}$.

C'est le même argument qui a été développé dans la question précédente

3) Reprendre et achever la preuve suivante selon laquelle $\sqrt{2}$ n'est pas une fraction, à partir d'un argument de parité. (on développera la contradiction).

Soient p et q entiers > 0 tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On en déduit $p^2 = 2q^2$. Choisissons p et q , avec p le plus petit possible. L'entier p est alors pair puisque son carré l'est. En effet il serait sinon impair et le carré d'un nombre impair est impair. On peut alors écrire $p = 2r$, avec r entier naturel. En simplifiant par 2, l'équation précédente se réécrit $q^2 = 2r^2$. D'où une contradiction. **Développer la contradiction**

On note d'abord que $q > p$, et quand on écrit $q^2 = 2r^2$ on a écrit une équation du même type que l'équation $p^2 = 2q^2$, mais avec, en terme de gauche, un terme plus petit ($q < p$), ce qui contredit la minimalité dans le choix de p qui avait été pris comme convention dans la preuve.

4) Soit l'ensemble des nombres entier qui vérifient la Propriété **(P)** selon laquelle lorsqu'ils sont multipliés par $\sqrt{2}$, ils demeurent un entier. **De tels nombres existeraient si $\sqrt{2}$ était une fraction**

a) Montrer que si x vérifie la Propriété **(P)**, alors $x\sqrt{2} - x$ vérifie aussi la Propriété **(P)**;

x vérifie la propriété (P), ça veut dire par définition que $x\sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Est-ce vrai aussi de $x\sqrt{2} - x$? Multiplions ce dernier nombre par $\sqrt{2}$: on trouve $x * 2 - x\sqrt{2}$, cad la différence de deux entiers naturels, dont le premier est plus grand : cette différence reste un entier naturel. Dit autrement $x\sqrt{2} - x$ vérifie la propriété (P).

b) en déduire que le seul nombre entier qui vérifie la Propriété **(P)** est 0, en étudiant le plus petit entier naturel positif qui vérifierait la Propriété **(P)**; **Si on considère $x > 0$ qui vérifie la propriété (P) et qui est le plus petit entier positif qui vérifie cette propriété, alors on sait que $x\sqrt{2} - x \in \mathbb{N}$ qui est plus petit que x vérifie aussi cette propriété. On en déduit alors que $x\sqrt{2} - x = 0$ et donc que $x = 0$, une contradiction. Cela achève de montrer que aucun nombre entier différent de zéro ne vérifie la Propriété (P). On vérifie enfin que 0 vérifie la propriété (P)**

c) en déduire que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Si $\sqrt{2}$ était rationnel, alors il existerait deux nombres p et q positifs strictement tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On en déduirait que q vérifie la propriété (P), ce qui n'est pas possible d'après ce qui précède puisque $q > 0$.

Donc $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

4 Puissances

1) Simplifier $\sqrt{\frac{a^4}{b^5}}$

Cette simplification est importante à comprendre.

$$\sqrt{\frac{a^4}{b^5}} = \left(\frac{a^4}{b^5}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{4 \cdot \frac{1}{2}}}{b^{5 \cdot \frac{1}{2}}} = a^2 b^{-5/2}$$

2) Une firme produit un bien à partir du facteur travail noté L . Plus elle utilise de ce facteur de production L , plus elle produit. Plus précisément, la fonction de production est

$$q = \sqrt{L}$$

a) Dire la production de la firme quand $L = 1$, $L = 2$, $L = 3$.

La production de la firme quand $L = 1$ est $q = \sqrt{1} = 1$

La production de la firme quand $L = 2$ est $q = \sqrt{2} \approx 1,41$

La production de la firme quand $L = 3$ est $q = \sqrt{3} \approx 1,73$

b) Comparer l'augmentation de la production quand l'on passe de $L = 1$ à $L = 2$ et de $L = 2$ à $L = 3$. Que remarquez-vous?

L'augmentation de la production quand on passe de $L = 1$ à $L = 2$ est de 0,41, cad qu'un input supplémentaire permet d'augmenter la production de 0,41

L'augmentation de la production quand on passe de $L = 2$ à $L = 3$ est de $1,73 - 1,41 = 0,32$, cad qu'un input supplémentaire permet d'augmenter la production de 0,32.

On remarque que le second input supplémentaire "produit moins" que le premier input supplémentaire; Cette propriété classique est appelée productivité marginale décroissante

5 Développement et factorisation

1) Développer les expressions suivantes

$$3(x+2) \quad (2x+3)x \quad (3x)^2 \quad (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{(n-1)}) \quad (2x+1)(3x+5)$$

$$3(x+2) = 3x+2$$

$$(2x+3)x = 8x^2+12x. \text{ (Typographie de l'énoncé médiocre. D'autres interprétations possibl$$

$$(3x)^2 = 9x^2$$

$$(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{(n-1)}) = (1+x+x^2+\dots+x^{(n-1)}) - (x+x^2+\dots+x^{(n)}) = 1-x^n$$

$$(2x+1)(3x+5) = 6x^2+13x+5$$

2) Factoriser les expressions suivantes

$$x^2 - x \quad x^2 + (a+b)x + ab \quad x^3 - ax^2 - bx^2 - cx^2 + abx + acx + bcx - abc$$

$$x^2 - x = x(x-1)$$

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

$$x^3 - ax^2 - bx^2 - cx^2 + abx + acx + bcx - abc = (x-a)(x-b)(x-c)$$