Maths et stats en Gestion

Chapitre IV
Mesure de l'évolution d'une fonction, Limites, Différentielles, Approximations

où l'on présente les questions élémentaires de l'analyse, concernant les fonctions et leur propriétés élémentaires, le calcul des variation, les dérivées, les différentielles et les approximations

Automne 2021 Université de Tours - A. Chassagnon

Les fonctions, toutes leurs caractéristiques

En mathématiques, les variations d'une fonction réelle d'une variable réelle sont le caractère croissant ou décroissant des restrictions de cette fonction aux intervalles sur lesquels elle est monotone

En économie-Gestion, on s'intéressera de manière assez prononcée sur la mesure de la variation de la fonction, sur l'évolution de la pente, et plus généralement à la courbure des courbes

Quand on s'intéresse à l'évolution d'e l'économie pour des valeurs extrêmes, on a recours au classique calcul de limites, les limites intuitives, et les indéterminations type $0/0$ ou type ∞/∞ à lever,

Enfin, plutôt que des fonctions compliquées, on aura souvent intérêt de se reporter à une approximation linéaire ou quadratique des fonctions considérées

Plan du cours

1) Généralités sur les fonctions

2) Propriétés à retenir concernant les fonctions de 1 variable

3) Limites d'une fonction de 1 variable

4a) Dérivées d'une fonction de 1 variable

4b) Variations et Approximations d'une fonction de 1 variable

5) [ouverture] Différentielle des fonctions de 2 variables

1. Généralités sur les fonctions

Définitions

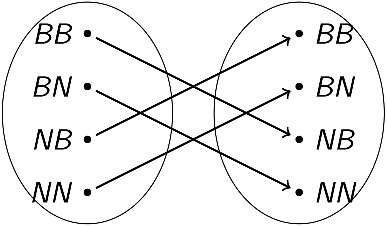
Définition

Une fonction $f : E \to F$ d'un ensemble E vers un ensemble F associe à chaque élément de E un élément dans F. On appelle domaine de définition de f les éléments de E auquel est associé un élément de F.

- on dit que la fonction est *injective* si deux éléments distincts de l'ensemble de départ ont des images distinctes dans l'ensemble d'arrivée.

- on dit que la fonction est *surjective* si tout élément de l'ensemble d'arrivée est l'image d'au moins un élément de l'ensemble de départ.

- on dit que la fonction est *bijective* si elle est injective et surjective. On note f^{-1} la fonction inverse de f, qui à tout élément de F associe l'élément de E correspondant.



ICI la fonction f est définie par :
f(BB) =NB
f(BN) = NN
f(NB) = BB
f(NN) = BN

DEUX REMARQUES :

Quand on considère deux ensemble E et F, s'il est toujours possible de définir une multitude de fonctions de E dans F, il est parfois IMPOSSIBLE d'établir une bijection entre E et F

Exemple : si on considère $E = [0, 1]$ et F le carré unité ($F = [0, 1]^2$), ces deux ensembles ne peuvent pas être en bijection.

Plus généralement, si on considère E=la droite réelle de l'ensemble des nombres réels, il est impossible de trouver une bijection entre E et $\mathbb{R}^2$, ni même une bijection entre E et le carré unité.

Continuité Smoothness

Définition

une fonction $f : x \to f(x)$ est continue si, à des variations infinitésimales de la variable x, correspondent des variations infinitésimales de la valeur f(x).

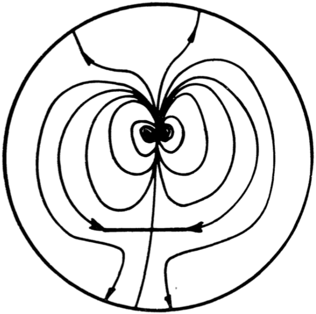
La continuité est associée à la notion de continuum dont l'origine est géométrique. Dans un continuum géométrique, comme le plan ou l'espace, un point peut se déplacer continument pour s'approcher à une précision arbitraire d'un autre point. La notion de continuité est définie de manière rigoureuse en mathématiques.

Smoothness

Soit $U \subset \mathbb{R}^k$ et $V \subset \mathbb{R}^l$ des ensembles ouverts. Une application $f : U \to V$ est dit *smooth* si toutes les dérivées de f existent et sont continues.

On parle parfois de fonction indéfiniment continûment différentiables.

Incursions



Difféomorphisme

Définition

Soit $U \subset \mathbb{R}^k$ et $V \subset \mathbb{R}^l$ des ensembles ouverts. Une application $f : U \to V$ est un difféMomortphisme si f est bijective et si f et f^{-1} sont smooth.

- La topologie différentielle étudie les propriétés d'un ensemble $X \subset \mathbb{R}^k$ qui sont invariantes par difféomorphisme. Elle étudie en particulier les smooth manifolds

- Un sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}^k$ est appelé un smooth manifold de dimension m s'il est difféomorphe à un ouvert (notons le U) de $\mathbb{R}^m$.

Parametrisation d'un smooth manifold

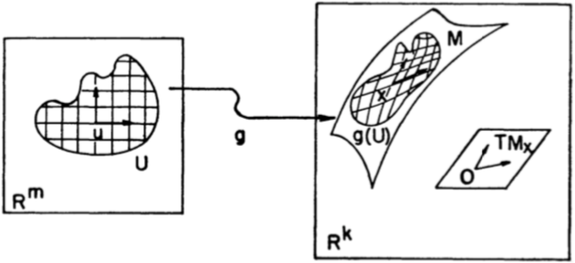


Figure 1. Parametrization of a region in M

- notez bien que dans cette figure, l'ensemble auquel on s'intéresse est M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^k$ (à droite), compliqué du point de vue de l'espace à k dimension, mais qui en fait a une structure simple, que l'on retrouve par son image dans $\mathbb{R}^m$ (U, à gauche).
- En Gestion, on a parfois affaire (sans le savoir) à des mécanismes complexes (type M) qu'on représente par une paramétrisation plus simple type U

Composée de deux fonctions

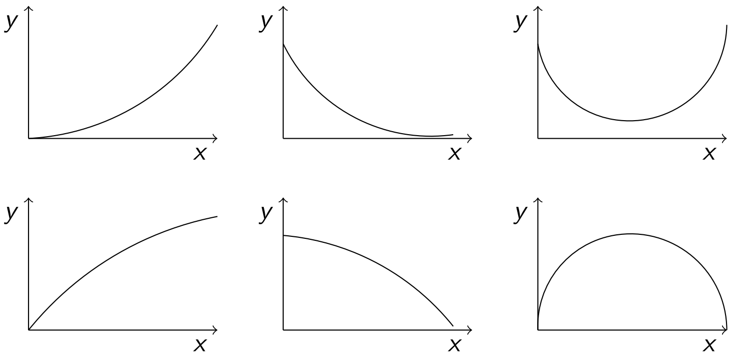
Définition

Soit une fonction $f : E \to F$ et une fonction $g : F \to G$, alors on définit la composée de f *puis* de g, notée $g \circ f$ la fonction :

$$g \circ f : E \to G \quad \text{telle que} \quad g \circ f(x) = g\big(f(x)\big).$$

2. Propriétés à connaître des fonctions de 1 variable

- l'objet de ce cours n'est pas de reprendre les cours d'analyse qui ont pu être assimilés ou non dans le second cycle. On s'intéressera aux différents profils d'une fonction $f(x)$ d'une variable réelle, qui peut être croissante, décroissante, concave, convexe, comme dans les représentations suivantes



Fonction croissante ou décroissante

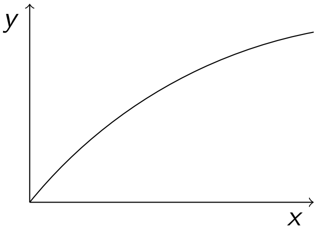
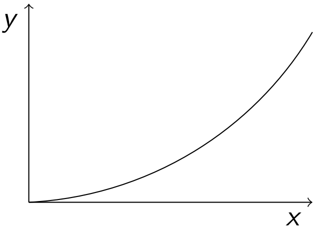
Comment vérifier qu'une fonction est croissante ...

- par l'intuition *commune* : quand x augmente, il apparaît évident que les différentes composantes de $f(x)$ augmentent
  - Exemple $g = x^2 + \sqrt{x} + \dfrac{1}{100 - x}$ pour $x < 100$
- En calculant la dérivée : quand la dérivée est positive $f(x)$ est croissante
  - Exemple $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{(100 - x)^2} > 0$ pour $x < 100$

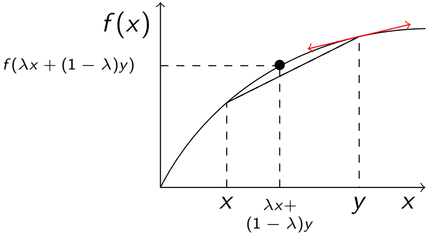
... ou décroissante ?

[Même méthode, avec une dérivée négative dans le cas décroissant.]

Fonction concave ou convexe

Concave	Convexe
	
□ Intuition : fonction croît de moins en moins □ Dérivée seconde négative : $f'' < 0$	□ Intuition : fonction croît de plus en plus (de façon exponentielle) □ Dérivée seconde positive : $f'' > 0$

Fonction concave, plus détaillée



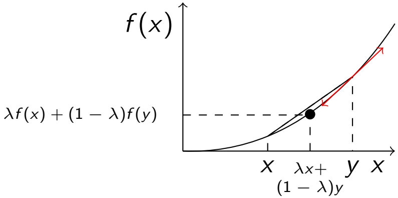
Proposition

Une fonction f concave ($f'' \leq 0$) vérifie les deux propriétés suivantes :

- $f'' < 0$ (que f soit croissante ou décroissante)
- f est en dessous de chacune de ses tangentes
- f est au-dessus de chacune de ses cordes :

$$\forall x, y \quad : \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \qquad \lambda \in [0,1]$$

Fonction convexe, plus détaillée



Proposition

Une fonction f convexe ($f'' \geq 0$) vérifie les deux propriétés suivantes :

- $f'' > 0$ (que f soit croissante ou décroissante)
- f est au-dessus de chacune de ses tangentes
- f est en dessous de chacune de ses cordes :

$$\forall x, y \quad : \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \qquad \lambda \in [0,1]$$

Inégalité de Jensen pour toute fonction convexe :

$$\forall x_i, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n \text{ tels que } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \quad : \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Convexe, concave ou ni l'un ni l'autre

Parmi les fonction suivantes, dire lesquelles sont convexes et/ou concave ou sont ni l'une ni l'autre. Tout argument est bon.

$$x^3 \quad x^2 \quad \sqrt{x} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \quad e^x \quad \frac{1}{1+x} \quad ax^2+bx+c \quad \ln(x) \quad ax+b$$

Petits résultats

- Si f, g sont concaves, alors $f+g$, λf, $g \circ f$, sont concaves (avec $\lambda > 0$)
- Si f, g sont convexes, alors $f+g$, λf, $g \circ f$, sont convexes (avec $\lambda > 0$)

- Si f est concave, alors $-f$ est convexe
- Si f est convexe, alors $-f$ est concave

- Si f est concave et $f \geq 0$, alors $1/f$ est convexe
- Si f est convexe et $f \leq 0$, alors $1/f$ est concave

- Si f, g sont concaves, alors $\min(f, g)$, est concave
- Si f, g sont convexes, alors $\max(f, g)$, est convexe

Fonction profit, fonction de coût

- On considère parfois que la fonction de coût $C(q)$ d'une firme est convexe :

Parce qu'il est de plus en plus couteux de produire quand on produit plus ? OUI☐ NON☐

Parce que les coûts sont exponentiels OUI☐ NON☐

C'est le cas quand $C(q) = \frac{1}{2}q^3$ OUI☐ NON☐

C'est le cas quand $C(q) = \frac{1}{1-q}$ pour $q < 1$ OUI☐ NON☐

- La fonction de profit d'une firme $\pi(q) = pq - C(q)$ est concave :

quand le coût est convexe OUI☐ NON☐

N'augmente pas énormément à l'infini OUI☐ NON☐

Pourrait diminuer quand le coût est très élevé OUI☐ NON☐

Est maximum pour une valeur particulière de q OUI☐ NON☐

Concavité et linéarité

Question

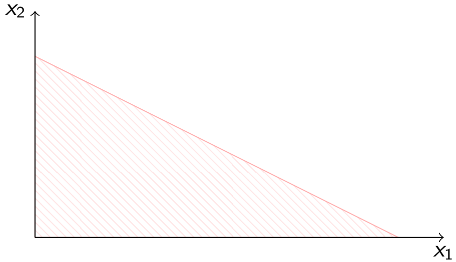
Pourquoi utilise-t'on souvent en Gestion des fonctions concaves ?

- Tout simplement parce que on sait que dans la réalité, ce qui se passe à une certaine échelle n'est plus vrai à une échelle plus grande ;
- dit autrement, un plan de production qui fonctionne pour une certaine quantité souvent ne fonctionne pas quand on double les quantités

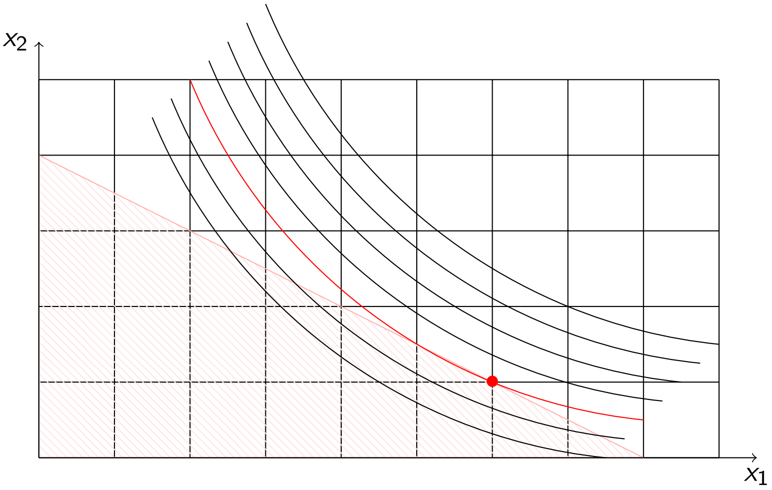
- On dit que la technologie de la firme dont la fonction de profit est $\pi(q) = pq - cq = (p - c)q$ est à rendement d'échelle constant tandis que la technologie de la firme dont la fonction de profit est $\pi(q) = pq - q^2$ est à rendement d'échelle décroissant.
- Pourquoi est-il peu vraisemblable que la fonction de coût d'une firme soit $C(q) = \sqrt{q}$?

Exemple classique de la consommation

Quand on étudie la consommation des ménages, il arrive que l'on considère l'utilité qu'un ménage peut retirer de la consommation d'un panier de bien. Un panier de bien est la quantité de chacun des biens consommés. Dans le cas d'une économie à deux bien, on le note (x_1, x_2). L'utilité pour un ménage particulier pourrait être $U(x_1, x_2) = x_1^3 x_2$

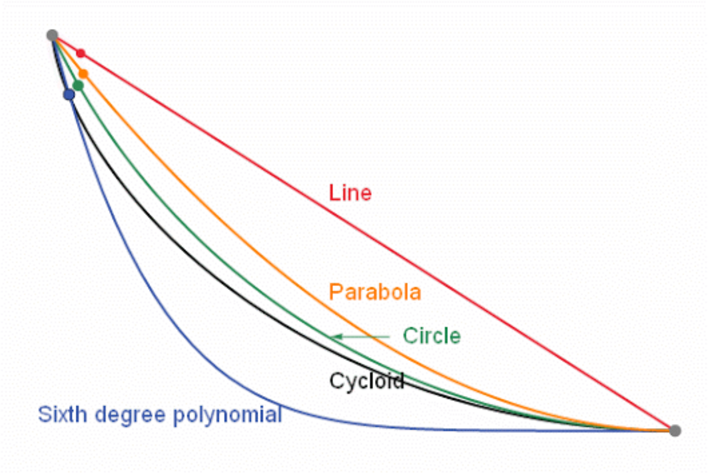


Montrer dans un espace à deux dimensions qu'une courbe d'indifférence d'équation $U = \alpha$ avec α constant est convexe. Représenter plusieurs courbes d'indifférences dans le graphique suivant. En supposant dans le graphe ci-dessus que la consommation, pour des raisons budgétaires ne peut être prise que dans la partie hachurée du graphique, représenter la meilleure consommation possible.



▶ si les courbes d'indifférence étaient linéaires, comment serait modifié le graphique ci-dessus, que se passerait-il ?

In June, 1696, Johann Bernoulli published the following six month challenge in Leibniz's journal Acta Eruditorum.
Given two points at different altitudes, what is the shape of the slide to allow an object to most quickly move from the upper point to the lower ?
On January, only Leibniz responded, asking for more time, so the challenge was extended until Easter.
Newton received a letter with the challenge after coming home from work, and solved the problem before going to sleep.


Line
Parabola
Circle
Cycloid
Sixth degree polynomial

3. Limites des fonctions de 1 variable

Le problème des limites

La question du calcul d'une limite d'une fonction en un point (éventuellement $+\infty$) se pose quand la fonction n'est pas définie en ce point. Cela arrive souvent quand il y a un dénominateur qui s'annule en ce point.

Prenons un exemple la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ n'est pas définie en $x = 1$ admet-elle une limite en $x = 1$? Dans cet exemple, on soit distinguer quand x s'approche de 1 en étant plus grand que 1, ce que l'on note

$$x \to 1^+$$

De quand x s'approche de 1 en étant plus petit que 1, ce que l'on note

$$x \to 1^-$$

En effet, quand $x \to 1$, la quantité au dénominateur est très petite, et donc la fonction est très grande, mais soit positivement ou négativement. On trouve :

$$\lim_{x \to 1^-} = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} = -\infty$$

Ce qu'on pourrait écrire intuitivement (notation <u>à ne pas utiliser</u>) : $\quad 1/0^+ = +\infty \qquad 1/0^- = -\infty$

Résultats de référence

Proposition

Toute puissance positive d'un infiniment grand est grande
Toute puissance positive d'un infiniment petit est petite
L'inverse d'un infiniment grand est infiniment petit
L'inverse d'un infiniment petit est infiniment grand (au signe près)

Donner les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} x^{3/2} \qquad \lim_{x\to +\infty} x^{-3/2} \qquad \lim_{x\to -\infty} x^{3} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^{-3} \qquad \lim_{x\to 0^-} x^{-3} \qquad \lim_{x\to 0^-} x^{-4}$$

Résultats de référence (assimilation)

Proposition

Toute puissance positive d'un infiniment grand est grande $(+\infty)^a = +\infty$
Toute puissance positive d'un infiniment petit est petite $(0^+)^a = 0$
L'inverse d'un infiniment grand est infiniment petit $(1/+\infty) = 0$
L'inverse d'un infiniment petit est infiniment grand (au signe près) $(1/0^+) = -$

Donner les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0^+} x^{3/2} = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} x^{-3/2} = 0 \quad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \quad \lim_{x \to 0^+} x^{-3} = +\infty \quad \lim_{x \to 0^-} x^{-3} = -\infty \quad \lim_{x \to 0^-} x^{-4} = +\infty$$

Limites déterminées et limites indéterminées

Quand une fonction est une transformation de plusieurs fonctions dont on connaît les limites, les limites suivent les mêmes transformations, ce qui conduit parfois à une indétermination. Le tableau suivant donne des règles qui sont somme tout intuitives :

$(+\infty)+(+\infty)$	$(+\infty)$
$(+\infty)-(+\infty)$	indéterminé
$(+\infty)*(+\infty)$	$(+\infty)$
$(+\infty)*(-\infty)$	$(-\infty)$
$\lambda*(+\infty), \lambda>0$	$(+\infty)$
$\lambda*(+\infty), \lambda<0$	$(-\infty)$
$0^+*(+\infty), \lambda>0$	indéterminé
$(+\infty)/(+\infty)$	indéterminé
$(+\infty)/(0^-)$	$(-\infty)$

Pour lever l'indétermination : cas standard $(+\infty)/(+\infty)$

- Commençons par un exemple. Etudions $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$

Clairement, on est dans un cas d'indétermination puisque à la fois le numérateur et le numérateur tendent vers $+\infty$.

- Idée : transformer la fonction en numérisant le numérateur et le dénominateur par le terme qui va le plus vite vers l'infini.

$$\frac{x^2-5x+6}{x-3} = \frac{x^2[1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}]}{x[1-\frac{3}{x}]} = x\frac{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}$$

Dans la première égalité, on a réalisé une mise en facteur au numérateur et au dénominateur
Dans la seconde égalité, on a simplifié x^2/x.
Il reste maintenant trois termes, dont on connaît les limites $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2} = 1$, $\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x} = 1$,
La limite recherchée est alors une opération de trois limites :
$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} = (+\infty) * (1/1) = +\infty$, ce qui lève l'indétermination

Pour lever l'indétermination : cas standard (0)/(0)

Réaliser un travail de simplification sur un quotient pour déterminer une limite.

- Si on poursuit l'exemple précédent. Etudions $\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$. 3 est une racine du numérateur, qui du coup s'écrit $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$. Après simplification, la limite recherchée est $\lim_{x \to 3^+} x - 2 = +1$

On peut appliquer la règle de l'hôpital (avec précaution) :

Règle de l'Hopital

Si f et g sont deux fonctions définies sur $[a, b[$, dérivables en a, et telles que $\underline{f(a) = g(a) = 0 \text{ et } g'(a) \neq 0}$, alors

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

- dans l'exemple la dérivée du numérateur est $2x - 5$, ayant pour valeur 1 en $x = 3$, la dérivée du dénominateur est 1 la limite est $1/1$.

Application : économies linéaires

Dans certains environnements, l'économie est linéaire, ce qui signifie que les fonctions objectifs des agents sont linéaires, les technologies sont linéaires.

Dans ce cas là, les économies auraient une tendance à diverger. Par exemple si on considère le profit d'une firme qui produit y à partir d'un nombre fini de x, $(y = ax)$ $\pi(x) = apx - wx$. Il y a clairement un problème de limite infinie à l'infini, à moins que $ap = w$.

L'argument d'équilibre dans ce cas, est $ap = w$.

4a. Dérivées d'une fonction de 1 variable

Accroissement moyen

Définition

On appelle accroissement moyen de la fonction f entre a et b le rapport

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Cet accroissement moyen n'est autre que le taux de variation pour aller du point $A(a, f(a))$ au point $B(b, f(b))$; C'est aussi la pente du vecteur $\vec{AB}$

- Calculer l'accroissement moyen de la fonction $\sqrt{x}$ entre 0 et 1, entre 1 et 2, entre 2 et 3, entre 3 et 4, entre 4 et 12. Que remarquez-vous, qu'en concluez-vous ?

Dérivée d'une fonction en un point

Définition

Supposons f définie sur un voisinage ouvert de a. On dit que f est dérivable en a si le rapport du taux de variation $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite quand $x \to a$. On note cette limite $f'(a)$.

- quand la dérivée est définie sur un ouvert, on définit la dérivée de la dérivée qu'on appelle dérivée seconde, qu'on note $f''(a)$, puis la dérivée troisième $f^{(3)}(a)$ et ainsi de suite. Comme on l'a déjà mentionné. Une bijection indéfiniment dérivable est appellée un difféomorphisme.

- Est-il pertinent de considérer dans des sciences appliquées comme la Gestion ou l'Economie des fonctions indéfiniment Dérivables ? La réponse est OUI. 1/ d'abord, ce sont des propriétés partagées par beaucoup des fonctions standard utilisées en économie. 2/ Il y a une certaine régularité dans ces fonctions qui peut traduire une certaine régularité dans le lien qu'il y a entre plusieurs variables.

Dérivées communes

Calculer les dérivées de

$$x \quad x^2 \quad \sqrt{x} \quad 1/x \quad x^a \quad e^x \quad \ln(x) \quad \frac{1}{1+x}$$

Calculer les dérivées secondes de

$$x \quad x^2 \quad \sqrt{x} \quad 1/x \quad x^a \quad e^x \quad \ln(x) \quad \frac{1}{1+x}$$

Sous l'hypothèse qu'une fonction de coût est telle que le coût marginal est croissant, dire quelles sont, parmi les fonctions suivantes les fonctions qui pourraient être des fonctions de coût

$$\sqrt{q} \quad \ln(q+1) \quad \ln(q) \quad q^a \quad a^q$$

À quoi sert la dérivée ?

- À caractériser la croissance ou la décroissance d'une fonction
- À mesurer la pente de la tangente d'une fonction
- Dans la consommation, pour caractériser l'utilité marginale, le TMS, la disposition marginale à payer
- Dans la production, pour caractériser la productivité marginale, le TMST, le coût marginal

▶ Comme on le voit, la dérivée permet d'analyser comment se comporte la fonction pour des "petites variations"

▶ C'est comme un couteau Suisse, la dérivée est utile, partout, un peu, beaucoup.

Différentes notations, toutes à connaître

- $f'(x)$ est la dérivée de la fonction $f(x)$
- $\dfrac{df}{dx}$ est la dérivée de la fonction $f(x)$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est la dérivée (partielle) de la fonction $f(x, a)$, a, un paramètre
- f_x est la dérivée de la fonction f par rapport à la variable x

Arithmétique sur les dérivées

Addition $(f+g)' = f' + g'$

Multiplication scalaire $(\lambda f)' = \lambda f'$

Multiplication $(fg)' = f'g + fg'$

Division $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Composition $(f \circ g)' = f' \circ g \times g'$

Exercice

i) Calculer trois dérivées successives de :

$\sqrt{x^2+x+1}$ et de e^x

Elasticités

La dérivée mesure la variation d'une fonction autour d'une variable a. On caculera parfois des Elasticités, qui ont l'avantage de mesurer en pourcentages la variation d'une fonction

Définition

L'elasticité de la fonction $f(x)$ par rapport à la variable x est la quantité

$$\varepsilon = \frac{x}{f} f'(x) = \frac{x}{f} \frac{df}{dx}$$

- La consommation de paquet de cigarette pour un consommateur est $q = R^2/p$. Calculer l'élasticité de la demande de paquet de cigarette par rapport au prix et indiquer si elle est grande ou non.

Elasticités pour le Monopole

- Démontrer que pour un monopole qui vend un bien, qui connaît la demande du marché $q = D(p)$, le prix p qu'il doit choisir pour optimiser ses profits et la quantité q à produire doivent satisfaire

$$\frac{p - C_m}{p} = \frac{1}{\varepsilon}, \tag{M}$$

Où $C_m = C'(q)$ désigne le coût marginal du monopole quand il produit q, et $\varepsilon = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$ désigne l'élasticité de la demande par rapport au prix

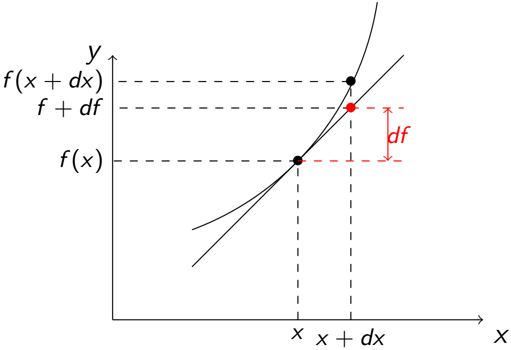
1) En se souvenant que C_m est le prix de marché auquel aurait été confronté ce même monopole s'il avait produit la même quantité q interpréter $\frac{C_m - p}{p}$
2) Dire ce qui se passe, selon l'équation (M), lorsque ε petit. Intuition.
3) Idem, dire ce qui se passe, lorsque ε grand (en valeur absolue). Intuition.
4) Traduire en mots simples la règle de choix du monopole.

4b. Variations et Approximations d'une fonction de 1 variable

Représentation graphique du problème

Soit une fonction $f(x)$ qui est définie sur un ouvert, quelle est l'approximation de sa valeur autour de x ?

- Que vaut $f(x + \varepsilon)$ pour ε petit ?
- Que vaut $f(x + dx)$ pour dx petit ?
- Que vaut $f(x + dx) - f(x)$ pour dx petit ?



Taylor

En mathématiques, plus précisément en analyse, le théorème de Taylor (ou formule de Taylor), du nom du mathématicien anglais Brook Taylor qui l'établit en 1715, montre qu'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point peut être approchée par une fonction polynomiale dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point. Cette fonction polynomiale est parfois appelée polynôme de Taylor.

Approximation linéaire d'une fonction de 1 variable

Principe

Soit une fonction définie sur un ouvert autour de x, son approximation linéaire autour de x est $f(x+dx) \approx f(x) + f_x dx$, notée

$$df = f_x dx$$

Où df, cad la variation approximée est appellée parfois la différentielle de f (plus précisément la *différentielle d'ordre 1 de f*).

- L'intuition à apprendre comme tel : QUAND x BOUGE DE dx, f BOUGE DE df
- Attention : la différentielle se calcule toujours autour d'un point x

Exercice : Calculer les différentielles de f pour les différentes fonctions suivantes AUTOUR DE ZÉRO :

$$x \quad x^2 \quad x^a \quad \ln(1+x)$$

Exemple d'une variation du prix d'un bien

- Le prix d'une pierre semi-précieuse exprimé en milliers d'euros est donné par l'expression $p(x) = x^2$ où x est la masse de la pierre exprimée en grammes. La masse moyenne de ces pierres est de 1,5 grammes

1) Donner le prix moyen d'une pierre
2) Calculer la différentielle de $p(x)$ autour de 1,5 grammes
3) Estimer le surcout d'une pierre si on achète une pierre dépassant de 4% la masse moyenne
4) Calculer l'élasticité de la valeur d'une pierre par rapport au poids. Retrouver le résultat précédent.

Approximation quadratique d'une fonction de 1 variable

Principe

Soit une fonction définie sur un ouvert autour de x, sa différentielle d'ordre 2 permet son approximation quadratique :

$$df = f_x dx + \frac{1}{2} f_{xx} (dx)^2,$$

autrement dit, $f(x + dx) \approx f(x) + f_x dx + \frac{1}{2} f_{xx} (dx)^2$

- L'approximation quadratique est plus précise que l'approximation linéaire : elle ajoute un terme en $(dx)^2$ à l'approximation linéaire.
- Attention : la différentielle se calcule toujours autour d'un point x

Exercice : Calculer les différentielles d'ordre 2 de f pour les différentes fonctions suivantes AUTOUR DE ZÉRO :

$$x \quad x^2 \quad x^a \quad \ln(1+x)$$

Résumé : Approximation d'une fonction de 1 variable

En utilisant les notations introduites précédemment on écrira :

Principe de l'approximation	$f(x+dx) = f(x) + df$
Approximation linéaire	$f(x+dx) = f(x) + f_x dx$
Approximation quadratique	$f(x+dx) = f(x) + f_x dx + \frac{1}{2} f_{xx} (dx)^2$

où df représente la « différentielle de f », cad sa partie approximée.

Approximation linéaire	La différentielle, dans ce niveau standard d'approximation est $df = f_x dx$. On parle de différentielle d'ordre 1. C'est une fonction linéaire de dx
Approximation quadratique	La différentielle, plus précise, est $df = f_x dx + \frac{1}{2} f_{xx} (dx)^2$. On parle de différentielle d'ordre 2. C'est une fonction quadratique de dx

▶ Il est demandé à l'examen d'écrire ces différentielles d'ordre 1 et 2, sous forme de fonctions de dx, mais aussi (c'est un exercice complémentaire, mais aussi la finalité) de calculer dans des cas pratiques l'approximation correspondante.

5. Différentielle de fonctions de deux variables

- Pourquoi considérer des fonctions de plusieurs variables $g(x, y)$?

Tout simplement parce qu'en Économie et en Gestion, on s'intéresse au lien qu'il peut y avoir entre plusieurs variables, et que ce lien s'écrirera sous la forme d'une relation

$$g(x, y) = 0$$

Variations des fonctions de type $f(x, y)$

Quand on considère une fonction de plusieurs variables $f(x, y)$, on s'intéresse aux variations de f

- quand x bouge
- quand y bouge
- quand x et y bougent à la fois.

Dérivation de $f(x, y)$ concernant la variation de x only

- Quand on considère une fonction de plusieurs variables $f(x, y)$, on s'intéresse aux variations de f quand x et x seulement bouge, cela revient à considérer une fonction de une variable, $x \to f(x, y)$. Les règles de dérivations et de différentiation standard s'appliquent.

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x},$$

C'est à dire qu'on dérive la fonction en considérant que tous les autres paramètres sont des constantes. On a par ailleurs

$$df = f_x dx + 0$$

Exercice : Calculer la dérivée partielle de f par rapport à x pour les différentes fonctions suivantes

$$xy \quad x^2/(1+y) \quad x^{a+y} \quad \ln(1+x+y)$$

Productivité marginale d'un facteur d'une firme de technologie $f(x, y)$

On s'intéresse à une firme qui produit selon la technologie $f(x, y)$: cad que lorsqu'elle utilise x unités du premier input Et y unités du second input, elle produit $f(x, y)$.

- Quelle est l'augmentation de la production si la firme utilise "une" unité supplémentaire du premier input

Productivité marginale d'un facteur d'une firme de technologie $f(x, y)$

On s'intéresse à une firme qui produit selon la technologie $f(x, y)$: cad que lorsqu'elle utilise x unités du premier input Et y unités du second input, elle produit $f(x, y)$.

- Quelle est l'augmentation de la production si la firme utilise "une" unité supplémentaire du premier input
- c'est f_x qu'on appelle encore la productivité marginale du premier facteur de production.

Dérivation de $f(x, y)$ concernant la variation de y only

- Quand on considère une fonction de plusieurs variables $f(x, y)$, on s'intéresse aux variations de f quand y et y seulement bouge, cela revient à considérer une fonction de une variable, $y \to f(x, y)$. Les règles de dérivations et de différentiation standard s'appliquent.

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y},$$

C'est à dire qu'on dérive la fonction en considérant que tous les autres paramètres sont des constantes. On a par ailleurs

$$df = 0 + f_y dy$$

Exercice : Calculer la dérivée partielle de f par rapport à y pour les différentes fonctions suivantes

$$xy \quad x^2/(1+y) \quad x^{a+y} \quad \ln(1+x+y)$$

Différentielle de $f(x, y)$ pour les variations de x et y

▶ Quand on considère une fonction de plusieurs variables $f(x, y)$, on peut s'intéresser aux variations de f quand x et y bougent en même temps. La notion de différentielle montre alors sa puissance.

Principe

Pour calculer la variation d'une fonction quand plusieurs variables bougent à la fois, on *additionne* tout simplement les effets de variation de chacune des variables. Autrement dit :

$$df = f_x dx + f_y dy$$

Exercice : Calculer la différentielle de f autour du point $x = 0$, $y = 0$ pour les différentes fonctions suivantes

$$xy \quad x^2/(1+y) \quad x^{a+y} \quad \ln(1+x+y)$$

Valeur relative d'un bien pour un ménage dont l'utilité est $u(x, y)$

- Dans une économie à 2 biens, on s'intéresse à la consommation d'un ménage dont la fonction d'utilité est $u(x, y)$, où x désigne la quantité de bien X consommée et y la quantité de bien Y consommée et on pose cette question : *Quelle est la valeur relative (par rapport au bien Y) que ce ménage attribue au bien X quand il consomme le panier de bien (x, y) ?*.

- On s'intéresse à la valeur d'échange que le ménage attribue au bien X, cad "pour moi, 1 bien X vaut *tant* de bien Y". Rien à voir avec le nombre $u(x, y)$.

On regarde la variation de la fonction u autour du point (x, y), et plus particulièrement les points qui satisfont la même utilité. Plus précisément un point $(x + dx, y + dy)$ a la même utilité que (x, y) si $f(x + dx, y + dy) = f(x, y)$, ce qu'on peut écrire, avec une approximation de premier ordre $df = 0$ soit $u_x dx + u_y dy = 0$.

Ainsi, les variations locales de (x, y) qui conduisent à la même utilité vérifient la loi $u_x dx + u_y dy = 0$, que l'on peut encore écrire $dy = -\frac{u_x}{u_y} dx$. Cette relation signifie que pour consommer une unité supplémentaire de bien X $(dx = 1)$ je suis prêt à céder u_x/u_y unités de bien Y.

La valeur d'échange que le ménage attribue au bien X est : $\frac{u_x}{u_y}$, ce qui n'est autre que la valeur absolue de la pente de la courbe $u(x, y) = \textit{constante}$, passant par (x, y).

Valeur des facteurs de production dans une firme de technologie $f(K, L)$

- On considère une firme qui produit un bien à partir de deux facteurs K et L. *Quelle est la valeur relative du facteur de production capital K par rapport au facteur de production travail L ?*

- On s'intéresse à la quantité de travail L qui permettrait de remplacer 1 unité de capital K.

On regarde la variation de la fonction de production f autour du point (K, L), et plus particulièrement les plans de production qui produisent la même chose. Plus précisément un plan de production $(K+dK, L+dL)$ produit la même chose que le plan de production (K, L) si $f(K+dK, L+dL) = f(K, L)$, ce qu'on peut écrire, avec une approximation de premier ordre $df = 0$ soit $f_K dK + f_L dL = 0$ ou encore $dL = -\frac{f_K}{f_L}$.

Ainsi, toute variation du plan de production satisfaisant $f_K dK + f_L dL = 0$ conduit à la même production. On en déduit que la quantité de travail qui permettrait de remplacer 1 unité de capital est

$$\frac{f_K}{f_L}$$

Exercice : Calculer la valeur d'une unité de capital quand $f = KL$ autour de $K = 1$ $L = 1$.