Fondements Economiques de la Gestion

Brèves du Cours

- Brève technique sur les dérivées -

Hiver 2021

Université de Tours - A. Chassagnon

Une dérivée permet de calculer la variation instantanée d'une fonction. Si la fonction f est définie sur un voisinage ouvert de a, elle est dérivable en a si le rapport du taux de variation $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand $x \to a$. On note cette limite $f'(a)$. Connaître la dérivée c'est calculer $f'(a)$ en tous les points a. On obtient alors une fonction, la dérivée, habituellement notée $f'(x)$.

Dérivées usuelles à connaître. Ces dérivées sont "indépendantes" du symbole de la variable.

1. f constante a une dérivée nulle : $f' = 0$
2. f linéaire $f = \alpha x$ a une dérivée constante : $f' = \alpha$
3. f puissance $f = x^a$ a pour dérivée : $f' = ax^{a-1}$
4. f log $f = \ln(x)$ a pour dérivée : $f' = 1/x$
5. f exponentielle $f = e^x$ a pour dérivée : $f' = e^x$

Règles de dérivation usuelles sur les opérations de fonction, à connaître !

1. $(f + g)' = f' + g'$
2. $(fg)' = f'g + fg'$
3. $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$
4. $(f(g))' = f'(g) * g'$

Dérivées de fonctions obtenues par opération sur des fonctions La plupart des fonctions qu'il vous sera demandé de dérivée proviennent d'addition, de multiplication, de division de fonctions. Vous devez savoir appliquer les règles proposées dans le transparent précédent.

Exemples $f = u(x)+x : f'(x) = u'(x)+1$; $f = u(x)x : f'(x) = u'(x)x+u(x)$; $f = x/u(x) : f'(x) = \frac{u(x)-xu'(x)}{(u(x))^2}$

Dérivées de fonctions obtenues par composition de fonction $f \circ g$ désigne la composition de f et g. L'opération est plus simple qu'on ne croît, on commence à calculer l'image de la variable par la fonction g, puis l'image du résultat obtenu par la fonction f ; ainsi $f \circ g(x) = f(g(x)) * g'(x)$. À connaître dans ce cas $\left(f \circ g\right)'(x) = f'(g(x))$.

$f = \sqrt{1+x} : f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} * 1$; $f = \sqrt{1+x+x^2} : f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x+x^2}} * (1+2x)$; $f = \ln(5x+k) : f'(x) = \dfrac{1}{5x+k} * 5$; $f = (5x^2+k)^{\frac{1}{2}} : f'(x) = \frac{1}{2}(5x^2+k)^{-\frac{1}{2}} * 10x$.

Dérivées d'une fonction de plusieurs variables Les dérivations pour les fonctions de deux variables s'opèrent quasi-identiquement : Il faut repérer dans la fonction de deux variables la variable à partir de laquelle on veut dériver la fonction, puis, on dérive cette fonction comme si c'était une fonction de une variable. On notera f_x la dérivée de f par rapport à la variable x et f_y la dérivée de f par rapport à la variable y.

Exemples : ***(a)*** $f(x,y) = x^2 + y + 1$: $f_x = 2x$, $f_y = 1$; ***(b)*** $f(x,y) = xe^y$: $f_x = e^y$, $f_y = xe^y$;
(c) $f(x,y) = 5e^{xy^2}$: $f_x = 5e^{xy^2} * y^2$, $f_y = 5e^{xy^2} * 2xy$;
(d) $\pi(p,q) = pq - C(q)$: $\pi_p = q$, $\pi_q = p - C'(q)$;
(e) $T(x_1,x_2) = \dfrac{\ln(x_2)}{x_1}$: $T_{x_1} = -\dfrac{\ln(x_2)}{(x_1)^2}$, $T_{x_2} = \dfrac{1}{x_1x_2}$;
(f) $u(x_1,x_2) = x_1^{a_1}x_2^{a_2}$: $u_{x_1} = a_1x_1^{a_1-1}x_2^{a_2}$, $u_{x_2} = a_2x_1^{a_1}x_2^{a_2-1}$.

Corrélation de variables et dérivées partielles En pratique, vous serez confrontés à des expressions qui dépendent de plusieurs variables et vous aurez à étudier la variation de cette expression en fonction de l'une ou des autres variables. C'est à ce moment là que l'on calcule des dérivées dites « partielles ».

QCM: Considérez l'expression f suivante dans laquelle vous supposerez que toutes les lettres désignent des variables différentes, sous forme multiplicative ou de fraction

$$f = \frac{dumbledore}{potter}.$$

Répondez aux 5 questions de dérivations suivantes - Refaites le quiz tant que vous n'obtenez pas 100 % de bonnes réponses.

a) L'expression f contient exactement 16 variables ;

b) L'expression f dépend de 11 variables exactement ;

c) $f_p = -\frac{1}{p}\frac{dumbledore}{potter}$, où f_p est la dérivée de f par rapport à p ;

d) $f_o = 0$, où f_o est la dérivée de f par rapport à o ;

e) $f_d = 2\frac{dumbleore}{potter}$, où f_d est la dérivée de f par rapport à d ;