Université de TOURS - L1 GESTION

Cours Fondements Économiques de la Gestion

Entrainements n° 3

Hiver 2018

Les savoirs pour cet entrainement : la définition du taux d'intérêt annuel, la définition d'un flux financier actualisé, les techniques d'actualisation, la définition des deux critique res de la VAN et du TRI dans l'évaluation de projets. Les questions marquées (*) sont plus difficiles et nécessitent un peu de reflexion

On appelle *taux d'intérêt* r d'un emprunt Y, le pourcentage du capital Y emprunté dû à la fin de chaque terme. Si j'emprunte Y, je dois à la fin du terme d'emprunt (souvent une année) un intérêt $r * Y$. On parle encore de *loyer de l'argent*.	La valeur actualisée aujourd'hui d'un flux financier futur est le Capital qu'il faudrait placer aujourd'hui aux taux d'intérêt en vigueur, afin d'obtenir demain ce flux. Par exemple si $r = 2\%$, la valeur actualisée de 102 € dans un an est 100 €. Plus généralement, la valeur actualisée de Y flux dans n années est $\frac{Y}{(1+r)^n}$.	La VAN d'un projet défini par des flux de revenus à différentes périodes futures est la *somme* de ces flux, *actualisés aujourd'hui* au taux d'intérêt du jour, précisé dans le calcul.	Il est nécessaire de connaître la somme infinie suivante : $1+x+x^2+x^3+x^4+...$ qui a une limite finie quand $x<1$: La limite est $\frac{1}{1-x}$.

1 Taux d'intérêt et VAN

Dans tout l'exercice on considère un taux d'intérêt $r = 2\%$ en vigueur pour les emprunts de période 1 (aujourd'hui) à la période 2 (dans un an), de période 2 (dans un an) à la période 3(dans deux ans), de la période 3 à la période 4 et, ainsi de suite.

1) Redire quelle est la valeur actualisée de 1.000 euros dans un an à ce taux $r = 2\%$. Vérifier qu'en plaçant la somme que vous avez obtenue, à 2%, vous obtenez bien 1.000 €.

Si on applique la formule, si on note X cette valeur actualisée aujourd'hui de 1.000 euros dans un an, on trouve

$$X = \frac{1000}{1,02} \approx 980,39$$

▶ **Attention, l'étudiant fait parfois une erreur en calculant le coefficient $1+r$. Ici, $r = 2\% = 0,02$ et $1+r = 1+0,02 = 1,02$.**

L'énoncé demande de vérifierce calcul : Si l'on place 980,39 €, dans un an, je retrouverai le capital, soit, 980,39 € plus l'intérêt, soit 980,39 €*0,02=19,61 €, soit au total $980,39 + 19,61 = 1000$ €.

2) Evaluer à $r = 2\%$ la VAN d'un projet qui rémunère 1.000 € dans un an, 2.000 € dans 2 ans et 3.000 € dans trois ans.

Il est donc nécessaire de calculer tour à tour,

- **la VA de 1.000 € dans un an, soit $1000/1,02 = 980,39e$,**
- **la VA de 2.000 € dans 2 ans, soit $2000/(1,02)^2 = 2000/1,0404 = 1\ 922,33e$,**
- **et la VA de 3.000 € dans trois ans, soit $3000/(1,02)^3 = 3000/1,0612 = 2\ 826,97e$,**

La VAN du projet est donc $980,39 + 1\ 922,33 + 2\ 826,97 = 5\ .729,69$ €.

▶ **Attention, l'étudiant a peut-être fait une erreur en ne remarquant pas que les rémunérations différaient chaque année...x**

3) On suppose que $r_1 = r_2 = \cdots = r_T = 10\%$, Quelle est la valeur actualisée à la date 0 de 1 euro à la date 1 ?

C'est par définition : $1/(1+0,10) = \frac{1}{1,1} \approx 0,91$€

4) On suppose que $r_1 = r_2 = \cdots = r_T = 10\%$, quelle est la valeur actualisée à la date 0 de 1 euro à la date 2 ?

C'est par définition : $1/(1+0,10)^2 = \frac{1}{1,21} \approx 0,83$€

5) On suppose que $r_1 = r_2 = \cdots = r_T = 10\%$, quelle est la valeur actualisée à la date 0 de 1 euro à la date t ?

C'est par définition : $1/(1+0,10)^t = \frac{1}{(1,1)^t}$€

6) Même contexte, Combien d'euros épargner à la date t' pour obtenir 1 euro à la date $t' + t$?

La question est un peu plus rusée.

Réponse brute. Notons x cette somme d'euros à épargner. Je l'épargne entre la période t' et la période $t + t'$, soit sur t périodes. Au bout de t périodes, cette somme aura rapporté $x(1,1)^t$. On doit donc résoudre l'équation

$$x(1,1)^t = 1$$

cad

$$x = \frac{1}{(1,1)^t}€$$

Remarquer que la réponse à cette question est exactement identique à la réponse à la question précédente. Pas de surprise. On aurait en effet pu reformuler la question ainsi : quelle est la valeur actualisée à t' de 1 euro à la date $t' + t$. Et la réponse à cette question, est la même que la réponse à la question «quelle est la valeur actualisée à la date 0 de 1 euro à la date t ? » étant donné que les mécanismes de transfert considérés seront identiques.

7) On suppose que $r_1 = 5\%$, $r_2 = 7,5\%$, $r_3 = 10\%$, quelle est la valeur actualisée à la date 0 de 1 euro à la date 1 ?

Le taux d'intérêt entre la date 0 et la date 1 est de $r_1 = 5\%$. 1 euro à la date 1 vaut $1/(1 + 0,05) = \frac{1}{1,05} \approx 0,95$€.

8) On suppose que $r_1 = 5\%$, $r_2 = 7,5\%$, $r_3 = 10\%$, quelle est la valeur actualisée à la date 0 de 1 euro à la date 2 ?

Le taux d'intérêt entre la date 0 et la date 1 est de $r_1 = 5\%$, celui de 1 euro entre la date 1 et la date 2 est de $r_2 = 7,5\%$. L'actualisation passe par ces deux canaux à des taux différents : 1 euro à la date 2 vaut $1/(1 + 0,05) * (1 + 0,075) = \frac{1}{1,12875} \approx 0,89$€.

9) On suppose que $r_1 = 5\%$, $r_2 = 7,5\%$, $r_3 = 10\%$, quelle est la valeur actualisée à la date 0 de 1 euro à la date 3 ?

Le taux d'intérêt entre la date 0 et la date 1 est de $r_1 = 5\%$, celui de 1 euro entre la date 1 et la date 2 est de $r_2 = 7,5\%$, celui de 1 euro entre la date 2 et la date 3 est de $r_2 = 10\%$. L'actualisation passe par ces deux canaux à des taux différents : 1 euro à la date 3 vaut $1/(1+0,05)*(1+0,075)*(1+0,1) = \frac{1}{1,241625} \approx 0,81$€.

10) Même contexte, Existe-t'il un taux d'intérêt constant qui permette d'effectuer les mêmes transferts de richesse que r_1, r_2, r_3. Quelle serait sa valeur ?

La question est mal formulée, il n'y a pas de réponse

11) Evaluer à $r = 2\%$ la VAN d'une rente à vie qui rémunère 15.000 € tous les ans, indéfiniment, à partir de dans un an.

La valeur actualisée de la rémunération de 1.000 euros aujourd'hui est 1.000 €. La valeur actualisée aujourd'hui de la rémunération de de 1.000 euros demain est de 1.000/1,02€. La valeur actualisée aujourd'hui de la rémunération de de 1.000 euros dans deux ans est de $1.000/(1,02)^2$€. La valeur actualisée aujourd'hui de la rémunération de de 1.000 euros dans trois ans est de $1.000/(1,02)^3$€, et ainsi de suite ; Aussi la valeur de cette rente est la somme de ces valeurs actualisées :

$$V = 1.000 + 1.000/(1,02) + 1.000/(1,02)^2 + 1.000/(1,02)^3 + \ldots,$$

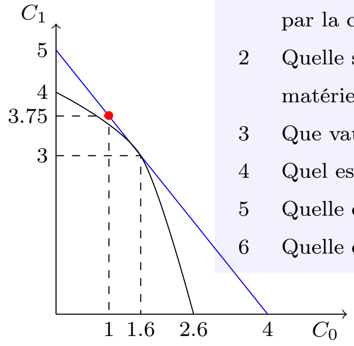
soit si l'on met 1000 en facteur

$$\begin{aligned} V &= 1000(1 + 1/(1,02) + 1/(1,02)^2 + 1/(1,02)^3 + \ldots, \\ &= 1.000 \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - (1/1,02)^n}{1 - (1/1,02)} \\ &= 1.000 \frac{1}{1 - (1/1,02)} = 1.000 * \frac{1,02}{0,02} = 1.000 * 51 = 51.000 \end{aligned}$$

Une autre manière de répondre à la question est de reprendre le résultat du cours qui indique qu'une rente qui délivre R, tous les ans à partir de l'an prochain est évaluée aujourd'hui au taux r, R/r. Ainsi, 1.000 euros demain, dans deux ans, etc... valent aujourd'hui $1000/0,02 = 50.000$. Il faut rajouter 1.000€ qui sont délivrés dès aujourd'hui, cela conduit à la valeur de 51.000€.

2 Choix d'investissement d'une firme

Dans la figure suivante la droite (bleue) représente les possibilités d'investissement sur les marchés de capitaux, et la courbe, les possibilités d'investissement en équipement productif. Supposons que le seul actif de l'entreprise consiste en 2,6 millions d'euros d'encaisse. On note enfin d'un point rouge le plan de consommation préféré du décideur.



1 Quel est le taux d'intérêt défini implicitement par la courbe bleue ?
2 Quelle somme l'entreprise devrait-elle investir dans le matériel de production
3 Que vaudra cet investissement dans un an ?
4 Quel est son taux de rentabilité marginal ?
5 Quelle est la valeur actuelle de cet investissement ?
6 Quelle est sa VAN ?

1) Le taux d'intérêt recherché, nommons-le r, est celui qui permet de passer de 4 euros aujourd'hui à 5 euros demain. On a donc

$$4 * (1 + r) = 5$$

soit encore $4r = 1$ soit, $r = 0,25$, résultat qu'on présente sous forme de pourcentage

$$r = 25\%$$

2) La courbe noire indique ce que la firme permettra d'avoir aujourd'hui et demain en utilisant les 2,6 millions d'encaisse. Par exemple, si rien n'est investi, on reste avec 2,6 millions aujourd'hui. Si on investit au contraire les 2,6 millions, on obtient 4 millions demain. Si on investit 1 million, on obtient 3 millions demain...

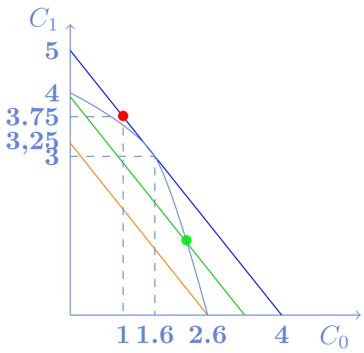
Il y a donc sur ce document deux technologies de transfert d'argent qui sont en concurrence. Par exemple, si la firme voulait investir 1,6 millions, il faudrait qu'elle le fasse à travers le marché financier qui lui permettrait d'obtenir plus demain.

Dans la réalité, le décideur peut se placer en n'importe quel point de la courbe d'investissement de la firme, puis ensuite, compléter son investissement par un emprunt ou une épargne sur le marché financier, Comme par exemple, sur le point vert, et la courbe verte parrallèle à la courbe bleue.

Ainsi, sous l'hypothèse que les agents peuvent prêter et emprunter sur le marché bancaire, à 25%, il est optimal de faire investir à la firme 1 million aujourd'hui, qui lui permettra d'obtenir 3 millions demain. Pourquoi ? en ce point, si l'on étire la courbe bleau qui représente le marché financier, on obtient le meilleur de ce que peut offrir la la technologie du marché financier. Et ensuite, une fois cela fait, le décideur peut compléter par le marché financier, en se retrouvant sur la courbe bleue.

La firme permet d'avoir beaucoup plus que si on ne passait pas par le marché financier. En effet, si on ne passait pas par la firme, et seulement par le marché financier, on aurait accès uniquement à la courbe orange ci après (où l'on a pu investir directement les 1,6 millions sur le marché financier, qui

rapportent alors $2,6 * 1,25 = 3,25$ millions).



3) L'investissement de 1 millions aujourd'hui dans l'appareil productif rapporte 3 millions dans un an (cf. la courbe). D'où l'importance de ce canal productif.

4) Le taux implicite (ou marginal) de l'investissement d'un million dans la firme est r tel que

$$3 = (1 + r)$$

soit $r = 2 = 200\%$. On parle de taux marginal, car il ne correspond qu'à cet investissement particulier de 1 million. Si on investit plus ou moins dans l'appareil productif, le taux change.

5) Pour calculer la VA et la VAN de cet investissement, il est nécessaire de calculer ce que vaut aujourd'hui 3 millions à t=1. Au taux en vigueur du marché financier c'est $3/1,25 = 2,4$. La VA de cet investissement est donc :

$$VA = 2,4$$

6) d'où le calcul de la VAN

$$VAN = 2,4 - 1 = 1,4$$