Contrôle Continu 2 – Correction

Non, Prénom et TD :

Jeudi 30 novembre 2017

Les calculatrices sont interdites. Les réponses doivent être justifiées (sauf pour le QCM).

Exercice 1 : Voitures !

Les parties sont indépendantes. Dans tout l'exercice, les hypothèses de la concurrence pure et parfaite sont vérifiées.

Une entreprise produit des voitures en quantité q, vendues à un prix p et produites à partir de deux facteurs de production : des machines en quantité notée x_1 et du métal en quantité notée x_2. Elle achète ces facteurs à des prix notés w_1 et w_2. La fonction de production de l'entreprise est la suivante :

$$q = (x_1 x_2)^{\frac{1}{3}}$$

Partie 1 : Court terme *(9 points)*

Dans toute cette partie, nous nous plaçons à court terme. Les machines sont utilisées en quantités fixes $\bar{x}_1$. Sauf dans les cas précisé dans la question, les réponses sont attendues avec des valeurs générales de $\bar{x}_1$, w_1 et w_2.

1. *(1 point)* Définissez le coût irrécouvrable. Que vaut-il ici ?
   Le coût irrécouvrable est le coût de l'investissement dans le facteur fixe à court terme. Il est dit irrécouvrable parce que l'entreprise l'a déjà payé et ne peut pas l'ajuster *a posteriori*. Il est ici de $w_1\bar{x}_1$. *(1 point)*

2. *(2 points)* Quel sera le coût total à court terme ? Le coût marginal ? Le coût moyen ? Le coût variable moyen ? Représentez graphiquement le coût marginal, le coût moyen et le coût variable moyen pour $\bar{x}_1 = 1$ et $w_1 = w_2 = 1$.
   À court terme, $x_1 = \bar{x}_1$, on a donc :
   $$x_2 = \frac{q^3}{\bar{x}_1}$$
   On en déduit le coût total :
   $$CT(q) = w_1\bar{x}_1 + \frac{w_2}{\bar{x}_1}q^3 = CF + CV(q)$$
   Le coût marginal :
   $$Cm(q) = CT'(q) = 3\frac{w_2}{\bar{x}_1}q^2$$
   Le coût moyen :
   $$CM(q) = \frac{CT(q)}{q} = w_1\bar{x}_1\frac{1}{q} + \frac{w_2}{\bar{x}_1}q^2$$
   Le coût variable moyen :
   $$CVM(q) = \frac{CV(q)}{q} = \frac{w_2}{\bar{x}_1}q^2$$
   (1 point)
   Pour $w_1 = w_2 = 1$ et $\bar{x}_1 = 1$, on a $Cm(q) = 3q^2$, $CM(q) = 1/q + q^2$ et $CVM(q) = q^2$.

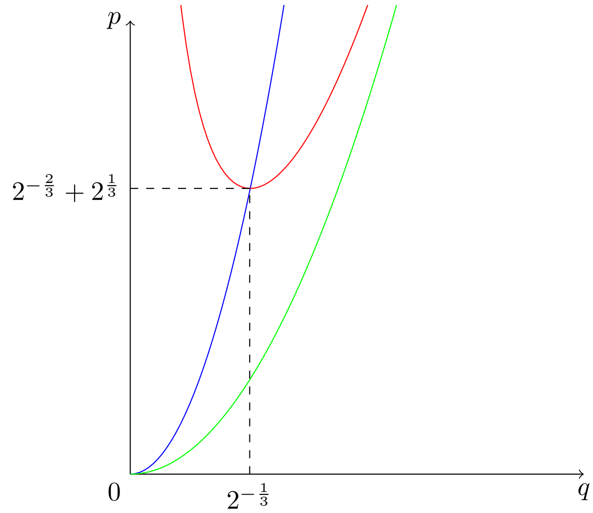


Figure 1: En bleu le coût marginal, en rouge le coût moyen et en vert le coût variable moyen. *(1 point)*

3. *(3 points)* Définissez et donnez le seuil de rentabilité et le seuil de fermeture. Comment varient-ils suivant l'investissement initial ? Les prix ?
   Le seuil de rentabilité est le prix à partir duquel il est possible pour le producteur de produire en faisant des bénéfices. Il est atteint au minimum du coût moyen. On calcule donc la CPO :
   $$CM'(q) = 0 \Leftrightarrow -w_1\bar{x}_1\frac{1}{q^2} + 2\frac{w_2}{\bar{x}_1}q = 0$$
   Soit $q = 2^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{3}}\bar{x}_1^{\frac{2}{3}}$. On obtient alors un seuil de rentabilité de :
   $$p = \left(w_1^2w_2\bar{x}_1\right)^{\frac{1}{3}}\left(2^{-\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right)$$
   Ce seuil est croissant avec les prix des facteurs, et est plus sensible au prix des machines qu'au prix du métal. *(2 points)*
   Le seuil de fermeture est le prix à partir duquel il est plus intéressant pour le producteur de produire, même à perte, plutôt que de ne pas produire. Il est atteint au minimum du coût variable moyen. Ce minimum est clairement atteint quand $q = 0$, soit à $p = 0$. *(1 point)*

4. *(3 points)* Quel est le profit de l'entreprise ? Comment évolue-t-il en fonction de l'investissement en machines ?
   La fonction d'offre de l'entreprise est donnée par $p = Cm(q)$, soit ici : *(1 point)*
   $$p = 3\frac{w_2}{\bar{x}_1}q^2 \Leftrightarrow q = \sqrt{\frac{1}{3}\bar{x}_1\frac{p}{w_2}}$$
   On obtient donc un profit de : *(1 point)*
   $$\pi(q) = \frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\frac{p^3}{w_2}\bar{x}_1\right)^{\frac{1}{2}} - w_1\bar{x}_1$$
   Cette fonction est d'abord décroissante, puis croissante à partir d'un certain investissement $\bar{x}_1^\star = \frac{27}{16}\frac{w_1w_2^2}{p^3}$ (calcul de la dérivée). Les retour sur investissement sont d'abord décroissants puis croissants. Quand l'investissement est élevé, investir plus est proportionnellement plus intéressant que quand l'investissement est faible. Chaque machine supplémentaire rapporte beaucoup plus quand il y a déjà beaucoup de machines, mais peu quand il y en a peu. Un sous-investissement rend la production très difficile. *(1 point)*

Partie 2 : Offre et demande *(6 points)*

1. *(1 point)* Dans la réalité, produire une voiture requiert d'autres facteurs de production (du travail, du textile, etc), la fonction d'offre de l'entreprise peut alors être exprimée de la manière suivante :

$$S(p) = 4p$$

Elle est sur un marché où la demande de voiture est de :

$$D(p) = 24 - 4p$$

Quel va être le prix à l'équilibre ? La quantité échangée ? Le prix à l'équilibre $p^\star$ va être tel que $D(p^\star) = O(p^\star)$, soit $p^\star = 3$. On obtient alors une quantité à l'équilibre de $q^\star = 12$.

2. *(2 points)* À l'équilibre, quel sera le surplus des consommateurs ? du producteur ? Le surplus global ? Représentez graphiquement les surplus, la demande et l'offre. À l'équilibre, le surplus du consommateur est de :

$$S_c = \frac{1}{2} \times (6 - 3) \times 12 = 18$$

Le surplus du producteur est de : *(1 point)*

$$S_p = \frac{1}{2} \times 3 \times 12 = 18$$

Le surplus global est de 36.

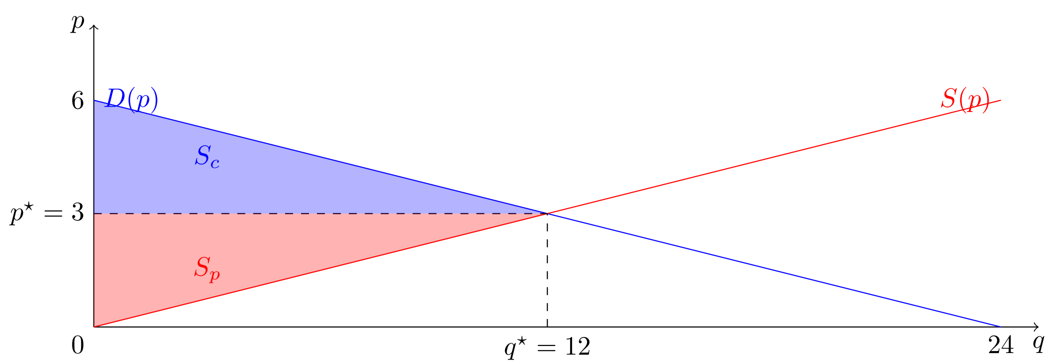


Figure 2: Représentation de la demande et de l'offre globale sur le marché des voitures. *(1 point)*

3. *(3 points)* L'État impose une taxe $0 < t < 2$ sur chaque unité produite, qu'il récupère entièrement. Comment évolue l'équilibre (quantités et prix) ? Comment varient les surplus ? Représentez graphiquement les surplus, la demande et l'offre pour une taxe de $t = 1$.
Le producteur vend toujours au même prix, mais le consommateur perçoit un prix de $p+t$. Sa demande sera donc maintenant $D(p) = 24 - 4(p + t)$. À l'équilibre :

$$24 - 4(p + t) = 4p \Leftrightarrow p^\star = 3 - \frac{t}{2} = \frac{1}{2}(6 - t) = \frac{5}{2}$$

La quantité échangée sera limitée par la quantité produite par le producteur, qui est de $q^\star = 12 - 2t = 2(6 - t) = 10$.

$$S_c = \frac{1}{2}\left(6 - \left(3 + \frac{t}{2}\right)\right) \times 2(6 - t) = \left(3 - \frac{t}{2}\right)(6 - t) = \frac{1}{2}(6 - t)^2 = 18 - 6t + \frac{t^2}{2} = 12.5$$

$$S_p = \frac{1}{2} \times 2(6 - t) \times \left(3 - \frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}(6 - t)^2 = 18 - 6t + \frac{t^2}{2} = 12.5$$

Les recettes de la taxe pour l'État sont de :

$$S_e = t \times 2(6-t) = 2t(6-t) = 10$$

Le surplus global est la somme du profit du surplus du producteur (son profit), du surplus du consommateur et des recettes de l'État.

$$S = S_c + S_p + S_e = (6-t)^2 + 2t(6-t) = (6-t)(6+t) = 36 - t^2 = 35 < 36$$

Le surplus global diminue avec la taxe.

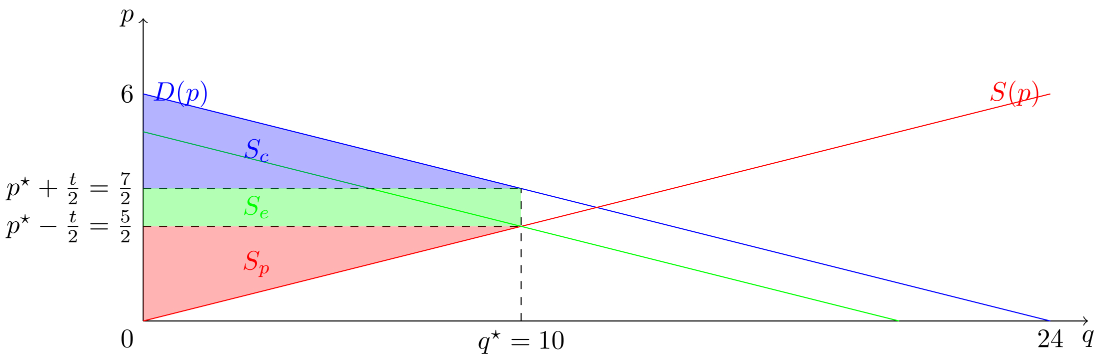
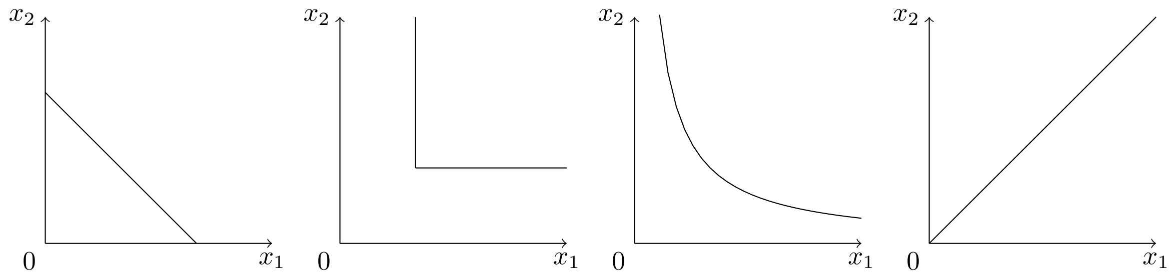


Figure 3: Représentation de la demande et de l'offre globale sur le marché des voitures, en incluant une taxe de $t = 1$ par unité produite. *(1 point)*

QCM *(1 point par question)*

Vous obtiendrez le point à la question **si et seulement si** vous avez sélectionné toutes les réponses justes et uniquement celles-ci. **Entourez** les réponses justes sur l'énoncé.

1. Les rendements d'échelle de la fonction de production $q = (x_1 x_2)^{\frac{2}{3}}$ sont :
   1. Constants
   2. **Croissants**
   3. Décroissants
   4. Aucune des réponses précédentes
2. Le seuil de fermeture est obtenu en :
   1. Minimisant le coût moyen
   2. Minimisant le coût
   3. Minimisant le coût marginal
   4. **Minimisant le coût variable moyen**
3. Pour déterminer la substituabilité / complémentarité de deux facteurs de productions, on peut :
   1. Calculer leurs productivités marginales
   2. Calculer leur élasticité prix croisée
   3. Calculer leur élasticité revenu
   4. **Calculer leur élasticité de substitution technique**
4. L'isoquante d'un producteur avec deux facteurs de production parfaitement substituables est représentée par :



5. Quelles hypothèses sont vérifiées dans un marché de concurrence pure et parfaite ?
    1. **Atomicité (des acteurs)**
    2. **Homogénéité (du produit)**
    3. Nullité des profits des entreprises
    4. Hétérogénéité (des produits)