Contrôle Continu 1

Jeudi 26 octobre 2017

Exercice : Pommes ou oranges ?

Mohamed consomme des pommes et des oranges. Sa fonction d'utilité définie de la manière suivante :

$$U(x_1, x_2) = \alpha \ln(x_1) + \ln(x_2) \text{ avec } \alpha \geq 0$$

où x_1 est la quantité de pommes, vendues au prix p_1 et x_2 est la quantité d'oranges, vendues au prix p_2. Mohamed a un revenu R.

1. Quelle est la contrainte budgétaire de Mohamed ? Est-elle saturée ? Pourquoi ?
   Sa contrainte budgétaire est $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq R$. *(1 point)*
   Sa contrainte budgétaire est saturée quelle que soit la valeur d'α car Mohamed a une utilité strictement croissante en x_2 et croissante (non décroissante) en x_1. *(1 point)*
2. Quelle est l'équation d'une courbe d'indifférence ? Est-elle convexe ? Représentez graphiquement le cas où $\alpha = 0$ (Vous pouvez utiliser comme utilité $\bar{U} = \ln 1$). Commentez.

$$\begin{array}{rrcl} & \bar{U} & = & \alpha \ln(x_1) + \ln(x_2) \\ \Leftrightarrow & \bar{U} & = & \ln\left(x_1^\alpha x_2\right) \\ \Leftrightarrow & \exp \bar{U} & = & x_1^\alpha x_2 \\ \Leftrightarrow & x_2 & = & \frac{\exp \bar{U}}{x_1^\alpha} \end{array}$$

   Les courbes d'indifférence ont pour équation générale $x_2 = \frac{e^{\bar{U}}}{x_1^\alpha}$. *(1 point)*
   Cette courbe d'indifférence est strictement convexe si $\alpha > 0$ (vous pouvez calculer la dérivée seconde pour vous en convaincre), et est une droite affine si $\alpha = 0$ (et est donc convexe). *(1 point)*
   Dans le cas $\alpha = 0$, les courbes d'indifférences sont parallèles à l'axe des abscisses : l'utilité de Mohamed ne dépend pas de la quantité de pommes consommées. *(1 point)*

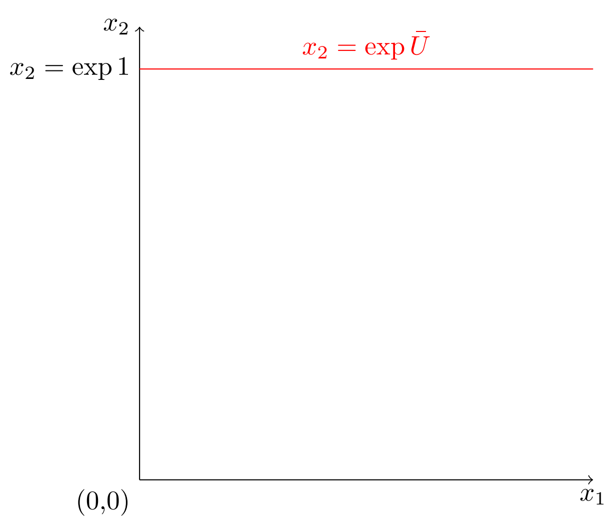

Figure 1: La courbe d'indifférence pour $\bar{U} = 1$ et $\alpha = 0$. *(1 point)*

3. Déterminer les fonctions de demande de Mohamed pour $\alpha > 0$. Commentez.
   Programme de maximisation (on peut recourir à l'égalité car la contrainte est saturée) *(1 point)* :

$$\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2) \text{ s.c. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = R$$

On peut utiliser que $TMS_{2\to 1} = \frac{p_1}{p_2}$, avec $TMS_{2\to 1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x_1} &= \frac{\alpha}{x_1}\\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= \frac{1}{x_2}\\ TMS_{2\to 1} &= \frac{\frac{\alpha}{x_1}}{\frac{1}{x_2}}\\ TMS_{2\to 1} &= \frac{\alpha x_2}{x_1}\end{aligned}$$

Donc

$$\alpha\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \alpha p_2 x_2 = p_1 x_1$$

On peut réutiliser cette égalité dans la contrainte budgétaire :

$$\alpha p_2 x_2 + p_2 x_2 = R \Leftrightarrow x_2^\star = \frac{1}{1+\alpha}\frac{R}{p_2}$$

On en déduit :

$$x_1^\star = \frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{R}{p_1}$$

(2 points)

La demande en pomme et en oranges est strictement croissante avec le revenu réel dans le cas où $\alpha > 0$. *(1 point)* 4. Sans calculs, donnez les fonctions de demande pour $\alpha = 0$.

Dans le cas où $\alpha = 0$, Mohamed ne retire aucune utilité de la consommation de pommes (visible dans la fonction d'utilité). Il va donc consommer uniquement des oranges, au prix p_2. On aura alors $x_2^\star = \frac{R}{p_2}$, et $x_1^\star = 0$. Sa demande pour les pommes est nulle. *(2 points)*

Alternativement, on peut utiliser le résultat de la question précédent en prenant $\alpha = 0$.

Exercice : Pommes ou oranges ? – Variante – (12 points)

Henri consomme des pommes et des oranges. Sa fonction d'utilité définie de la manière suivante :

$$U(x_1, x_2) = \ln(x_1) + \alpha\ln(x_2) \text{ avec } \alpha \geq 0$$

où x_1 est la quantité de pommes, vendus au prix p_1 et x_2 est la quantité d'oranges, vendues au prix p_2. Henri a un revenu R.

1. Quelle est la contrainte budgétaire d'Henri ? Est-elle saturée ? Pourquoi ?
   Sa contrainte budgétaire est $p_1x_1 + p_2x_2 \leq R$. *(1 point)*
   Sa contrainte budgétaire est saturée quelle que soit la valeur d'α car Henri a une utilité croissante (non décroissant) en x_2 et strictement croissante en x_1. *(1 point)*
2. Quelle est l'équation d'une courbe d'indifférence ? Est-elle convexe ? Représentez graphiquement le cas où $\alpha = 0$ (Vous pouvez utiliser comme utilité $\bar{U} = \ln 1$). Commentez.

$$\begin{aligned} & \bar{U} &=& \ln(x_1) + \alpha\ln(x_2)\\ \Leftrightarrow & \bar{U} &=& \ln\left(x_1 x_2^\alpha\right)\\ \Leftrightarrow & \exp\bar{U} &=& x_1x_2^\alpha\\ \Leftrightarrow & x_2 &=& \left(\frac{\exp\bar{U}}{x_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\end{aligned}$$

   Les courbes d'indifférence ont pour équation générale $x_2 = \left(\frac{\exp\bar{U}}{x_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. *(1 point)*
   Cette courbe d'indifférence est strictement convexe si $\alpha > 0$ (vous pouvez calculer la dérivée seconde pour vous en convaincre), et est une droite verticale si $\alpha = 0$ (et est donc convexe). Pour obtenir ce dernier résultat, il est plus simple de repartir de l'utilité quand $\alpha = 0$ et de voir qu'alors on obtient

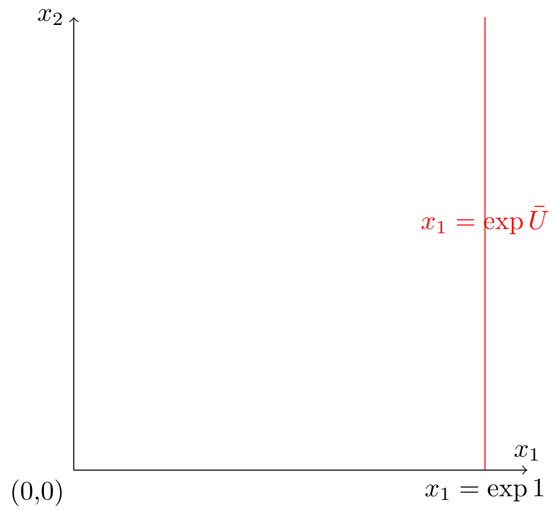

Figure 2: La courbe d'indifférence pour $\bar{U} = 1$ et $\alpha = 0$. *(1 point)*

l'équation $x_1 = \exp \bar{U}$. *(1 point)*
Dans le cas $\alpha = 0$, les courbes d'indifférences sont parallèles à l'axe des ordonnées : l'utilité d'Henri ne dépend pas de la quantité d'oranges consommées. *(1 point)*

3. Déterminer les fonctions de demande d'Henri pour $\alpha > 0$. Commentez.
Programme de maximisation (on peut recourir à l'égalité car la contrainte est saturée) *(1 point)* :

$$\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2) \text{ s.c. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = R$$

On peut utiliser que $TMS_{2\to1} = \frac{p_1}{p_2}$, avec $TMS_{2\to1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}$. On a :

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1}$$
$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\alpha}{x_2}$$
$$TMS_{2\to1} = \frac{\frac{1}{x_1}}{\frac{\alpha}{x_2}}$$
$$TMS_{2\to1} = \frac{x_2}{\alpha x_1}$$

Donc

$$\frac{1}{\alpha}\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow p_2 x_2 = \alpha p_1 x_1$$

On peut réutiliser cette égalité dans la contrainte budgétaire :

$$p_1 x_1 + \alpha p_1 x_1 = R \Leftrightarrow x_1^\star = \frac{1}{1+\alpha}\frac{R}{p_1}$$

On en déduit :

$$x_2^\star = \frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{R}{p_2}$$

(2 points)

La demande en pomme et en oranges est strictement croissante avec le revenu réel dans le cas où $\alpha > 0$. *(1 point)* 4. Sans calculs, donnez les fonctions de demande pour $\alpha = 0$.
Dans le cas où $\alpha = 0$, Henri ne retire aucune utilité de la consommation d'oranges (visible dans la fonction d'utilité). Il va donc consommer uniquement des pommes, au prix p_1. On aura alors $x_1^\star = \frac{R}{p_1}$, et $x_2^\star = 0$. Sa demande pour les oranges est nulle. *(2 points)*
Alternativement, on peut utiliser le résultat de la question précédent en prenant $\alpha = 0$.

Exercice : Aujourd'hui ou demain ?

Emmanuelle a une fonction d'utilité intertemporelle définie de la manière suivante :

$$U(c_1, c_2) = \alpha c_1 + c_2 \text{ avec } \alpha \geq 0$$

Où c_1 sa consommation aujourd'hui et c_2 sa consommation demain. Le prix aujourd'hui est p_1, le prix demain est p_2.

1. Emmanuelle a-t-elle une préférence pour le présent ? Discutez suivant les valeurs de α.
   On calcule le $TMS_{2\to1} = \alpha$. *(1 point)*
   Ce $TMS_{2\to1}$ est constant, en particulier pour $c_1 = c_2$. Si $\alpha > 1$, $TMS_{2\to1} > 1$: Emmanuelle souhaite consommer plus aujourd'hui que demain, elle a une préférence pour le présent. Au contraire, si $\alpha < 1$, elle souhaite consommer plus demain qu'aujourd'hui, elle a une préférence pour le futur. Si $\alpha = 1$, elle souhaite consommer autant aujourd'hui et demain. *(1 point)*

2. On note i le taux d'intérêt nominal dans cette économie, r le taux d'intérêt réel, et π le taux d'inflation. Rappelez la relation entre ces trois taux. Quel est le lien entre le taux d'inflation et les prix ? Quelle est l'interprétation économique de $1 + r$?

   $$1 + r = \frac{1 + i}{1 + \pi}$$

   avec $1 + \pi = \frac{p_2}{p_1}$. *(1 point)*
   $1 + r$ est la quantité de bien de demain à laquelle il faut renoncer pour obtenir un bien aujourd'hui. *(1 point)*

3. Donnez la contrainte budgétaire intertemporelle **réelle** d'Emmanuelle, sachant qu'elle a un revenu nominal R_1 aujourd'hui et R_2 demain. Notez B son épargne aujourd'hui ($B > 0$ si elle épargne, $B < 0$ si elle emprunte). Notez W sa richesse intertemporelle réelle.
   Sa contrainte budgétaire aujourd'hui est *(1 point pour chaque)*:

   $$p_1 c_1 + B = R_1$$

   Et demain :

   $$p_2 c_2 = R_2 + (1 + i)B$$

   Après calculs, en utilisant ces deux contraintes budgétaires et les relations de la question 2, on obtient :

   $$c_1 + \frac{1}{1 + r} c_2 = \frac{R_1}{p_1} + \frac{1}{1 + r} \frac{R_2}{p_2} = W$$

   (2 points)

4. **(2 points)** Représentez graphiquement sa contrainte budgétaire pour $W = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ et $i = 0$. Représentez aussi sa courbe d'indifférence pour $\alpha = 1$ et une utilité de 1.
   Avec les valeurs des paramètres données, l'équation de la courbe d'indifférence est $c_2 = 1 - c_1$.
   Pour la contrainte budgétaire intertemporelle, il faut remarquer qu'avec $i = 0$, dans la question, on a $\frac{1}{1+r} = 1 + \pi = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2}$. On en déduit donc que :

   $$c_1 + \frac{1}{2} c_2 = 1 \Leftrightarrow c_2 = 2 - 2c_1$$

5. Quelles vont être ses consommations aujourd'hui et demain ? (Supposez $\alpha > 0$) On a $TMS_{2\to1} = \alpha$. On compare ce $TMS_{2\to1}$ avec $1 + r$ (auquel il doit être égal à l'optimum). Ici les consommations aujourd'hui et demain sont parfaitement substituables. On a trois possibilités :

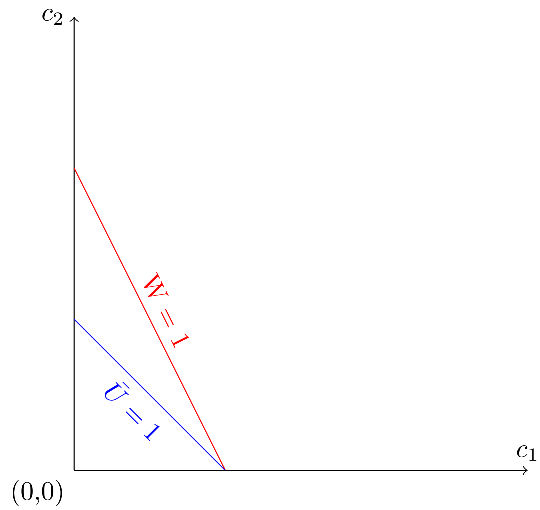

Figure 3: La courbe d'indifférence pour $\bar{U} = 1$ et $\alpha = 1$ et la contrainte budgétaire intertemporelle pour $W = 1$. *(1 point)*

- $1 + r > \alpha$: Emmanuelle va consommer uniquement demain, et ne consommera rien aujourd'hui. Le taux d'intérêt est suffisamment élevé pour qu'elle préfère tout épargner plutôt que de consommer.
- $1 + r < \alpha$: Emmanuelle va consommer uniquement aujourd'hui, et ne consommera rien demain. Le taux d'intérêt est suffisamment faible pour qu'elle préfère emprunter aujourd'hui tout le revenu qu'elle aura demain.
- $1 + r = \alpha$: Emmanuelle est indifférente entre consommer aujourd'hui et demain. Elle peut emprunter tout son revenu ou l'épargner en totalité, peu lui importe. *(2 points)*

5. **(Bonus : 1 point)** Que se produit-il si $\alpha = 0$? Si $\alpha = 0$, on devrait fort logiquement être dans le cas numéro 1 : Emmanuelle préfère consommer tout son revenu demain. Elle n'accorde aucune valeur à sa consommation du jour.

Exercice : Aujourd'hui ou demain ? – Variante –

Emmanuelle a une fonction d'utilité intertemporelle définie de la manière suivante :

$$U(c_1, c_2) = c_1 + \beta c_2 \text{ avec } \beta \geq 0$$

Où c_1 sa consommation aujourd'hui et c_2 sa consommation demain. Le prix aujourd'hui est p_1, le prix demain est p_2.

1. Emmanuelle a-t-elle une préférence pour le présent ? Discutez suivant les valeurs de β.
   On calcule le $TMS_{2\to 1} = \frac{1}{\beta}$. *(1 point)*
   Ce $TMS_{2\to 1}$ est constant, en particulier pour $c_1 = c_2$. Si $\beta < 1$, $TMS_{2\to 1} > 1$: Emmanuelle souhaite consommer plus aujourd'hui que demain, elle a une préférence pour le présent. Au contraire, si $\beta > 1$, elle souhaite consommer plus demain qu'aujourd'hui, elle a une préférence pour le futur. Si $\beta = 1$, elle souhaite consommer autant aujourd'hui et demain. *(1 point)*
2. On note i le taux d'intérêt nominal dans cette économie, r le taux d'intérêt réel, et π le taux d'inflation. Rappelez la relation entre ces trois taux. Quel est le lien entre le taux d'inflation et les prix ? Quelle est l'interprétation économique de $1 + r$?

$$1 + r = \frac{1 + i}{1 + \pi}$$

avec $1+\pi = \frac{p_2}{p_1}$. *(1 point)* $1+r$ est la quantité de bien de demain à laquelle il faut renoncer pour obtenir un bien aujourd'hui. *(1 point)*

3. Donnez la contrainte budgétaire intertemporelle **réelle** d'Emmanuelle, sachant qu'elle a un revenu nominal R_1 aujourd'hui et R_2 demain. Notez B son épargne aujourd'hui ($B > 0$ si elle épargne, $B < 0$ si elle emprunte). Notez W sa richesse intertemporelle réelle.
Sa contrainte budgétaire aujourd'hui est *(1 point chaque)*:

$$p_1 c_1 + B = R_1$$

Et demain :

$$p_2 c_2 = R_2 + (1+i)B$$

Après calculs, en utilisant ces deux contraintes budgétaires et les relations de la question 2, on obtient :

$$c_1 + \frac{1}{1+r} c_2 = \frac{R_1}{p_1} + \frac{1}{1+r} \frac{R_2}{p_2} = W$$

(2 points)

4. **(2 points)** Représentez graphiquement sa contrainte budgétaire pour $W = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ et $i = 0$. Représentez aussi sa courbe d'indifférence pour $\beta = 1$ et une utilité de 1.
Avec les valeurs des paramètres données, l'équation de la courbe d'indifférence est $c_2 = 1 - c_1$.
Pour la contrainte budgétaire intertemporelle, il faut remarquer qu'avec $i = 0$, dans la question, on a $\frac{1}{1+r} = 1 + \pi = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2}$. On en déduit donc que :

$$c_1 + \frac{1}{2} c_2 = 1 \Leftrightarrow c_2 = 2 - 2c_1$$

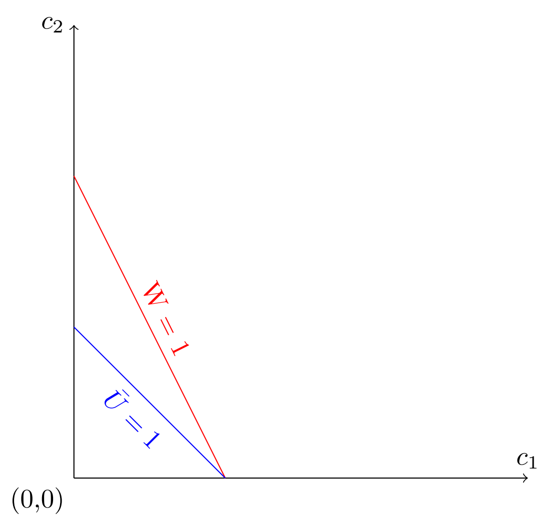

Figure 4: La courbe d'indifférence pour $\bar{U} = 1$ et $\beta = 1$ et la contrainte budgétaire intertemporelle pour $W = 1$. *(1 point)*

5. Quelles vont être ses consommations aujourd'hui et demain ? (Supposez $\beta > 0$) On a $TMS_{2\to1} = \frac{1}{\beta}$. On compare ce$TMS_{2\to1}$ avec $1+r$ (auquel il doit être égal à l'optimum). Ici les consommations aujourd'hui et demain sont parfaitement substituables. On a trois possibilités :

- $1+r > \frac{1}{\beta}$: Emmanuelle va consommer uniquement demain, et ne consommera rien aujourd'hui. Le taux d'intérêt est suffisamment élevé pour qu'elle préfère tout épargner plutôt que de consommer.
- $1+r < \frac{1}{\beta}$: Emmanuelle va consommer uniquement aujourd'hui, et ne consommera rien demain. Le taux d'intérêt est suffisamment faible pour qu'elle préfère emprunter aujourd'hui tout le revenu qu'elle aura demain.

- $1+r=\frac{1}{\beta}$: Emmanuelle est indifférente entre consommer aujourd'hui et demain. Elle peut emprunter tout son revenu ou l'épargner en totalité, peu lui importe. *(2 points)*

5. **(Bonus : 1 point)** Que se produit-il si $\beta = 0$? Si $\beta = 0$, on devrait fort logiquement être dans le cas numéro 2 : Emmanuelle préfère consommer tout son revenu aujourd'hui. Elle n'accorde aucune valeur à sa consommation demain. Elle a une préférence infinie pour le présent.

Exercice : Pile ou face ?

Aude a une fonction d'utilité sur sa richesse définie de la manière suivante :

$$U(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

Elle dispose au départ d'une richesse R. On lui propose de jouer à pile ou face. Si elle obtient pile, sa richesse est doublée. Si elle obtient face, elle perd tout. Elle se comporte suivant la théorie de l'utilité espérée.

1. Est-elle averse au risque ? Pourquoi ?
   On dérive deux fois sa fonction d'utilité pour obtenir $U''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$. *(1 point)*
   cette dérivée seconde est strictement négative sur $\mathbb{R}_\star^+$. L'utilité d'Aude est donc concave et Aude est averse au risque. *(1 point)*
2. Jouera-t-elle à ce jeu ? Pourquoi ?
   Pour savoir si Aude jouera à ce jeu, on calcule son utilité sans jouer : $U(R) = R^{\frac{1}{3}}$. *(1 point)*
   Et son espérance d'utilité en jouant :

   $$EU(jouer) = \frac{1}{2}(2R)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}0^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}}R^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{R}{4}\right)^{\frac{1}{3}} < R^{\frac{1}{3}}$$

   Aude préfère ne pas jouer à ce jeu. *(1 point)*
3. Calculez l'équivalent certain de cette loterie et la prime de risque. Expliquez et commentez. L'équivalent certain de ce jeu est la somme telle qu'Aude sera indifférente entre cette somme et jouer à pile ou face :

   $$\begin{array}{rrcl} & U(EC) & = & EU(jouer) \\ \Leftrightarrow & (EC)^{\frac{1}{3}} & = & \left(\frac{R}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \Leftrightarrow & EC & = & \frac{R}{4} \end{array}$$

   L'équivalent certain vaut $\frac{R}{4}$. *(2 points)*
   La prime de risque est

   $$\rho = E(X) - EC = R - \frac{R}{4} = \frac{3}{4}R$$

   La prime de risque est positive, ce qui est bien cohérent avec le fait qu'elle ne joue pas. La prime de risque représente le montant maximal qu'Aude serait prête à payer pour ne pas jouer à ce jeu. *(2 points)*

Exercice : Pile ou face ? – Variante –

Aude a une fonction d'utilité sur sa richesse définie de la manière suivante :

$$U(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

Elle dispose au départ d'une richesse R. On lui propose de jouer à pile ou face. Si elle obtient pile, sa richesse est doublée. Si elle obtient face, elle perd tout. Elle se comporte suivant la théorie de l'utilité espérée.

1. Est-elle averse au risque ? Pourquoi ?
   On dérive deux fois sa fonction d'utilité pour obtenir $U''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}$. *(1 point)*
   cette dérivée seconde est strictement négative sur $\mathbb{R}_{\star}^{+}$. L'utilité d'Aude est donc concave et Aude est averse au risque. *(1 point)*

2. Jouera-t-elle à ce jeu ? Pourquoi ?
   Pour savoir si Aude jouera à ce jeu, on calcule son utilité sans jouer : $U(R) = R^{\frac{2}{3}}$. *(1 point)*
   Et son utilité en jouant :
   $$EU(jouer) = \frac{1}{2}(2R)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}0^{\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{1}{3}}R^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}} < R^{\frac{2}{3}}$$
   Aude préfère ne pas jouer à ce jeu. *(1 point)*
3. Calculez l'équivalent certain de cette loterie et la prime de risque. Expliquez et commentez. L'équivalent certain de ce jeu est la somme telle qu'Aude sera indifférente entre cette somme et jouer à pile ou face, il vaut $\frac{R}{\sqrt{2}}$. *(2 points)*
   La prime de risque est :
   $$\rho = E(X) - EC = R - \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}R$$
   La prime de risque est positive, ce qui est bien cohérent avec le fait qu'elle ne joue pas. La prime de risque représente le montant maximal qu'Aude serait prête à payer pour ne pas jouer à ce jeu. *(2 points)*

Exercice : Pile ou face ? – Variante – (8 points)

Aude a une fonction d'utilité sur sa richesse définie de la manière suivante :

$$U(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

Elle dispose au départ d'une richesse R. On lui propose de jouer à pile ou face. Si elle obtient pile, sa richesse est doublée. Si elle obtient face, elle perd tout. Elle se comporte suivant la théorie de l'utilité espérée.

1. **(2 points)** Est-elle averse au risque ? Pourquoi ?
   On dérive deux fois sa fonction d'utilité pour obtenir $U''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$. *(1 point)*
   cette dérivée seconde est strictement négative sur $\mathbb{R}_{\star}^{+}$. L'utilité d'Aude est donc concave et Aude est averse au risque. *(1 point)*

2. **(2 points)** Jouera-t-elle à ce jeu ? Pourquoi ? Pour savoir si Aude jouera à ce jeu, on calcule son utilité sans jouer : $U(R) = R^{\frac{1}{2}}$. *(1 point)*
   Et son utilité en jouant :
   $$EU(jouer) = \frac{1}{2}(2R)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}0^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{R}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < R^{\frac{1}{2}}$$
   Aude préfère ne pas jouer à ce jeu. *(1 point)*
3. **(4 points)** Calculez l'équivalent certain de cette loterie et la prime de risque. Expliquez et commentez. L'équivalent certain de ce jeu est la somme telle qu'Aude sera indifférente entre cette somme et jouer à pile ou face, il vaut $\frac{R}{2}$. *(2 points)*
   La prime de risque est :
   $$\rho = E(X) - EC = R - \frac{R}{2} = \frac{1}{2}R$$
   La prime de risque est positive, ce qui est bien cohérent avec le fait qu'elle ne joue pas. La prime de risque représente le montant maximal qu'Aude serait prête à payer pour ne pas jouer à ce jeu. *(2 points)*

Exercice : Pain = Farine + levure !

Paul et ses frères produisent du pain (en quantité notée q) à l'aide de farine (en quantité notée x_1) et de levure (en quantité notée x_2). Leur fonction de production du pain est la suivante :

$$q(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

1. Caractérisez cette fonction de production. Représentez l'isoquante pour q = 1.
   On calcule le taux marginal de substitution technique entre les deux facteurs de productions :

   $$TMST_{2\to 1} = \frac{x_2}{x_1}$$

   Les deux facteurs de productions sont partiellement substituables, mais pas complètement : il faut un minimum de farine et de levure pour produire du pain. *(1 point)*
   Quand $q = 1$, l'équation de l'isoquante est $x_2 = \frac{1}{x_1}$: c'est une hyperbole.

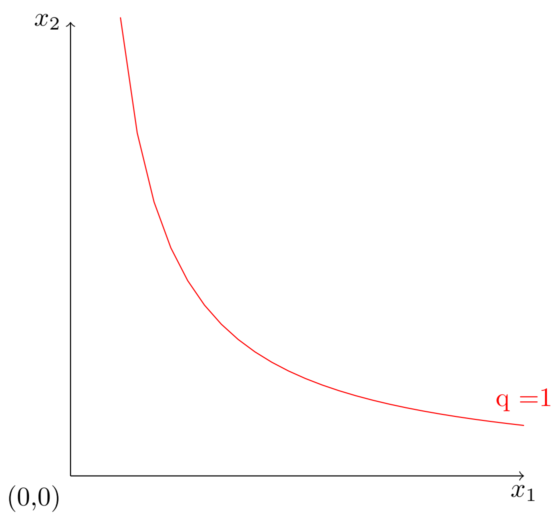

Figure 5: L'isoquante q = 1. *(1 point)*

2. Quels sont les rendements d'échelle de cette fonction de production ? Commentez.

   $$q(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^2 q(x_1, x_2)$$

   Les rendements d'échelle sont croissants. Cela signifie que la quantité produite augmente relativement plus vite que les facteurs utilisés. *(2 points)*
3. Le prix de la farine est de p_1, celui de la levure est de p_2. Quel est le mélange optimal de farine et de levure que vont utiliser Paul et ses frères pour produire 1 pain ? Sachant que Paul et ses frères sont preneurs du prix. Commentez.
   On égalise le taux marginal de substitution technique est le rapport des prix *(1 point)*:

   $$TMST_{2\to 1} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

   Le mélange optimal est tel que $x_1 x_2 = 1$ et $x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$, soit $x_1^\star = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}$ et $x_2^\star = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}$. *(1 point)*
   On constate que la quantité de farine utilisée augmente avec le prix de la levure et diminue avec le prix de la farine, et vice versa pour la levure. C'est un résultat attendu dans la mesure ou ces deux facteurs de production sont imparfaitement substituables. *(2 points)*