Introduction à l'analyse microéconomique
Compléments utiles sur la théorie du consommateur

Marianne Tenand
Monitorat ENS 2014-2015
`marianne.tenand@ens.fr`

1 Préférences : quelques définitions

1.1 Monotonicité des préférences

Monotonicité faible

$$\text{si} \quad x \geq y \quad \text{alors} \quad x \geq y$$

« Au moins autant est au moins aussi bien : garantit que le bien ou le service en question est un « bien »et non un « mal ».

Monotonicité

$$\text{si} \quad x > y \quad \text{alors} \quad x \succ y$$

Strictement plus de l'ensemble des biens est strictement mieux.

Monotonicité forte

$$\text{si} \quad x \geq y \quad \text{et} \quad x \neq y \quad \text{alors} \quad x \succ y$$

Strictement plus d'un bien et au moins autant de l'ensemble des autres biens est strictement préféré.

Non-satiété locale

Pour tout $x \in X$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un panier de consommation $y \in X$ avec $\mid x - y \mid < \epsilon$ tel que $y \succ x$

Cette propriété nous dit qu'on peut toujours trouver un bien infiniment proche du panier x et qui va lui être préféré.

La monotonicité implique la non-satiété locale.

Exemple d'utilisation : Dans la démonstration de la dualité, on l'utilise pour trouver un panier de consommation très proche du panier solution au PMU, qui apporte plus d'utilité que ce dernier tout en étant réalisable au regard de la contrainte de budget.

2 Propriétés de la demande marshallienne

2.1 Loi de Walras

La loi de Walras dit que, pour des préférences monotones, le consommateur dépense entièrement son revenu pour acquérir le panier de consommation qui maximise son utilité :

$$\forall p, R \in X^2, \quad x(p,R).p = R$$

2.2 Homogénéité de degré 0

On dit qu'une fonction $f(x)$ est homogène de degré d en x lorsque, $\forall \lambda > 0$:

$$f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$$

La demande marshalienne est homogène de degré 0 en (p,R) : lorsqu'on multiplie tous les prix et le revenu par une constante strictement positive, λ, la demande reste inchangée. En effet, l'ensemble de budget (soit l'ensemble des paniers de consommation qui respecte la contrainte budgétaire) reste le même.

Formellement :

$$x(\lambda p, \lambda R) = \lambda^0 x(p,R) = x(p,R)$$

2.3 Théorème d'Euler

Soit x un panier de consommation à k biens. $\forall l \in \{1,...,k\}$, si $\forall (p,R)$ $x_l(p,R)$ est homogène de degré 0, alors :

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \frac{\partial x_l}{p_i} + \frac{\partial x_l}{\partial R} R = 0$$

Ce qui implique, en prenant la définition de l'élasticité-prix (croisée) et de l'élasticité-revenu :

$$\sum_{i=1}^{k} \epsilon_{l,i} + \epsilon_{l,R} = 0$$

Autrement dit, les effets-prix et -revenu sont séparables, et l'effet-revenu est égal (mais de sens inverse) à l'ensemble des effets-prix.

Démonstration :

Soit $\lambda > 0$. Par définition de l'homogénéité de degré 0, $x(\lambda p, \lambda R) = x(p, R)$. Si on dérive la fonction de demande marshalienne par rapport à λ (en considérant λR et λp_i comme des fonctions de λ) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_l(p,R)}{\partial \lambda} &= \frac{\partial x_l(\lambda p, \lambda R)}{\partial \lambda} \\ &= \sum_{i=1}^{k} p_i \frac{\partial x_l(\lambda p, \lambda R)}{\partial(\lambda p_i)} \frac{\partial(\lambda p_i)}{\partial \lambda} + \frac{\partial x_l(\lambda p, \lambda R)}{\partial(\lambda R)} \frac{\partial(\lambda R)}{\partial \lambda} \\ &= \sum_{i=1}^{k} p_i \frac{\partial x_l(\lambda p, \lambda R)}{\partial(\lambda p_i)} p_i + \frac{\partial x_l(\lambda p, \lambda R)}{\partial(\lambda R)} R\end{aligned}$$

Or par définition de l'homogénéité de degré 0, la demande marshalienne ne variant pas lorsque les prix et le revenu sont multipliés par un même facteur, on a :

$$\frac{\partial x_l(p,R)}{\partial \lambda} = 0$$

D'où :

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \frac{\partial x_l(\lambda p, \lambda R)}{\partial(\lambda p_i)} p_i + \frac{\partial x_l(\lambda p, \lambda R)}{\partial(\lambda R)} R = 0$$

Cette égalité se vérifie pour toute valeur positive de λ, en particulier pour $\lambda = 1$. Ainsi :

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \frac{\partial x_l(p,R)}{\partial p_i} p_i + \frac{\partial x_l(p,R)}{\partial R} R = 0$$

En divisant par la demande marshalienne ($x(p,R) \neq 0$ puisque les préférences sont monotones et $R > 0$), on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} p_i \frac{\partial x_l(p,R)}{\partial p_i} \frac{p_i}{x(p,R)} + \frac{\partial x_l(p,R)}{\partial R} \frac{R}{x(p,R)} &= 0 \\ \sum_{i=1}^{k} \epsilon_{l,i} + \epsilon_{l,R} &= 0\end{aligned}$$

3 Propriétés importantes

3.1 Le lemme de Shepard

Ce lemme relie la fonction de demande hicksienne à la fonction de dépenses, pour un niveau de prix $p > 0$ et $\overline{u} > U(0)$.

$$\forall j = \{1, ..., k\}, \quad h_j(p, \overline{u}) = \frac{\partial e(p, \overline{u})}{\partial p_j}$$

3.2 L'identité de Roy

$$\forall j = \{1, ..., k\}, \quad x_j(p, R) = -\frac{\frac{\partial v(p,R)}{\partial p_j}}{\frac{\partial v(p,R)}{\partial R}}$$

L'identité de Roy relie la demande marshalienne pour un bien donné aux variations dans la fonction d'utilité inidrecte induites par une variation marginale du prix du bien et par une variation marginale du revenu. Elle permet donc de déduire la demande marshalienne de l'expression de la fonction d'utilité indirecte.

Démonstration :

Supposons que x^* soit solution au PMU pour un revenu R^* et un vecteur de prix p^*. On note $u^* = U(x^*)$. Alors, d'après les propriétés de la dualité :

$$u^* = v(p, e(p, u^*) \quad (\forall p > 0)$$

Donc en particulier :

$$u^* = v(p^*, e(p, u^*))$$

NB : on peut ainsi voir que le second argument de la fonction d'utilité indirecte (le revenu R, qui est égal à la dépense minimale nécessaire pour atteindre le niveau d'utilité u^*) est une fonction du prix.

Si on prend la dérivée partielle de cette expression par rapport à p_j, on obtient (puisque u^* étant une constante, sa dérivée par rapport à p_j vaut 0) :

$$0 = \frac{\partial v(p^*, R^*)}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial p_j} + \frac{\partial v(p^*, R^*)}{\partial R}\frac{\partial e(p, u^*)}{\partial p_j}$$

En utilisant le lemme de Shepard, on peut donc remplacer la dérivée partielle de la fonction de dépense par rapport au prix p_j par la fonction de demande hicksienne :

$$0 = \frac{\partial v(p^*, R^*)}{\partial p_j} + \frac{\partial v(p^*, R^*)}{\partial R}h(p^*, u^*)$$

Or, toujours d'après les propriétés de dualité :

$$x(p^*, R^*) = h(p^*, u^*)$$

Ainsi,

$$0 = \frac{\partial v(p^*, R^*)}{\partial p_j} + \frac{\partial v(p^*, R^*)}{\partial R} x(p^*, R^*)$$

En réarrangeant les termes on obtient bien l'identité de Roy.

3.3 L'équation de Slutsky

Cette équation permet de quantifier les effets de revenu et de substitution observés lors d'un changement dans le prix d'un bien.

$$\forall j = \{1, ..., k\}, \qquad \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(p, R)}{\partial p_j} - x_j(p, R) \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial R}$$

Cette propriété se démontre en utilisant les propriétés de la dualité du PMU et du PMD.

Dans le cas où $i = j$:

- $\frac{\partial x_i(p,R)}{\partial p_i}$ est l'effet-prix total ;
- $\frac{\partial h_i(p,R)}{\partial p_i}$ est l'effet de substitution (c'est bien la variation marginale de la demande hicksienne qui est en jeu).
  Il est toujours négatif (lorsque le prix d'un bien augmente, la demande compensée pour ce bien diminue) ;
- $-x_i(p, R) \frac{\partial x_i(p,R)}{\partial R}$ est l'effet de revenu : il est d'autant plus fort que la consommation de bien i en laquelle est évaluée l'effet d'un changement marginal de prix est élevée.
  Il est souvent négatif (la hausse du revenu entraîne une augmentation de la quantité du bien i consommée) ; mais il peut être positif (bien inférieur). Si l'effet-revenu (positif) dépasse l'effet de substitution (négatif), alors une hausse du prix du bien i va induire une augmentation de sa consommation. Le bien i est alors un bien de Giffen.