Université François Rabelais - L1 AES

Cours d'Economie Générale

Enoncé du TD n° 7

Automne 2012

1 Une simple histoire de production, et déjà des calculs

Vous considérez dans cet exercice une firme qui a la possibilité de construire *une seule unité d'un bien* ou rien, à partir de capital et de travail, et qui a un choix très limité dans l'usage des technologies possibles. La firme doit choisir entre les trois combinaisons suivantes :

	tech. A	tech. B	tech. C
K	$1/2$	1	2
L	2	1	$1/2$

On suppose que la firme loue le capital pendant la durée de la production au prix k et que le prix de une unité de travail est w. On suppose enfin que le prix de vente du bien est $p = 5$.

Pour répondre aux trois premières questions, il s'agit d'évaluer, pour chacune des hypothèses concernant les prix des facteurs les coûts de chacune des technologies. La technologie choisie sera donc celle dont le coût est le plus faible. On complète donc le tableau de l'énoncé en rajoutant quatre lignes correspondant aux quatre scénarios de prix proposés dans les trois questions suivantes.

	tech. A	tech. B	tech. C
K	$1/2$	1	2
L	2	1	$1/2$
$k = 1$ et $w = 1$	1/2+2=2,5	1+1=2	2+1/2=2,5
$k = 2$ et $w = 2$	1/2*2+2*2=5	2+2=4	2*2+1/2*2=5
$k = 4$ et $w = 1$	1/2*4+2=2,5	4+1=5	2*4+1/2=8,5
$k = 1$ et $w = 4$	2*4+1/2=8,5	4+1=5	1/2*4+2=2,5

1) Quel est le choix optimal de la technique de production quand $k = 1$ et $w = 1$?

En lisant le tableau, la technologie B est la moins coûteuse quand $k = 1$ et $w = 1$

2) Même question quand $k = 2$ et $w = 2$. Qu'est-ce qui change dans ce deuxième cas ?

En lisant le tableau, la technologie B est la moins coûteuse quand $k = 1$ et $w = 1$. Ceci n'est pas surprenant, car ce qui a changé par rapport à la question précédente est que tous les coûts ont été multipliés par deux. Il n'y a pas de modification dans les classements des différentes technologies.

3) Même question quand $k = 4$ et $w = 1$.

En lisant le tableau, la technologie A est la moins coûteuse quand $k = 4$ et $w = 1$. Ce n'est pas très surprenant, car la technologie A utilise moins du facteur de production le plus cher.

Même question quand $k = 1$ et $w = 4$.

En lisant le tableau, la technologie C est la moins coûteuse quand $k = 1$ et $w = 4$. Ce n'est pas très surprenant, car la technologie C utilise moins du facteur de production le plus cher.

4) Le prix relatif du facteur capital en facteur travail est k/w. Calculer le prix relatif du facteur capital dans chacun des quatre cas étudié. Montrer que la quantité de capital utilisée est décroissante avec le prix relatif du capital en travail.

En réordonnant les différents cas étudiés on obtient :

prix des facteurs	prix relatif k/w	Nombre optimal K utilisés
$k = 1$ et $w = 4$	$k/w = 0,25$	$K^C = 2$
$k = 1$ et $w = 1$	$k/w = 1$	$K^B = 1$
$k = 4$ et $w = 1$	$k/w = 4$	$K^A = 1/2$

Il ressort bien de ce tableau que plus le prix relatif du facteur capital augmente, moins on utilise de capital.

Cette loi, relativement intuitive, guide en économie le choix des entreprises, quand il y a une certaine substituabilité entre capital et travail.

2 Production d'une firme à rendements décroissants en CPP

Cet exercice est similaire à l'exercice précédent, hormis le fait que l'entreprise dispose désormais d'un nombre infini de technologie. On recherche donc la meilleure technologie étant donné les prix des facteurs.

Le corrigé qui suit est celui d'un exercice similaire. Ce corrigé est donné à titre d'information, pour les plus curieux d'entre vous qui auraient fait cet exercice. Cependant, l'examen ressemblera plus à l'exercice précédent qu'à cet exercice.

On suppose qu'une firme en CPP produit un bien en quantité q à partir de capital L et de travail L, suivant la fonction de production : $q = K^{1/3}L^{1/3}$. On suppose que les prix des facteurs ainsi que le prix de vente du bien produit n'est pas contrôlé par la firme et est exogène : on les note respectivement k, w et p.

1) Calculer la production de la firme en CPP.

La firme est à rendement décroissant car à l'évidence, pour $\lambda > 1$, $q(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{2/3} q(K, L) < \lambda\, q(K, L)$. La production optimale de la firme vérifie donc que la productivité marginale de chacun des facteurs égale le prix de ce facteur, ce que l'on peut écrire

$$\frac{1}{3}\, K^{-2/3} L^{1/3} = k \qquad \frac{1}{3}\, K^{1/3} L^{-2/3} = w$$

de ces deux équations on déduit $w/k = K/L$ et finalement

$$\frac{1}{3}\, (w/k)^{1/3} L^{1/3} L^{-2/3} = w \Longleftrightarrow \frac{1}{3}\, (1/w^2 k)^{1/3} = L^{1/3} \Longleftrightarrow L = \frac{1}{9w^2 k}\frac{1}{3}\, (1/w^2 k)^{1/3}$$

et $K^{1/3} = \frac{1}{3}\, (w/k)^{1/3} L^{1/3} = \frac{1}{9}\, (1/wk^2)^{1/3}$ d'où finalement [Notez qu'il faut répondre à la question posée]

$$\boxed{q^* = \frac{1}{9wk}}$$

Il est à remarquer que la production diminue avec le prix de chacun des facteurs, ce qui est relativement intuitif.

2) Expliquer pourquoi l'hypothèse de rendements décroissants est essentielle dans ce problème.

Sans rendements décroissant, il n'y a pas de plan de production qui maximise le profit.

Notez qu'il n'est pas inutile dans la correction de réécrire le programme optimal de la firme.

3 Firme utilisant un facteur pour produire un bien

Une firme produit un bien à partir du facteur travail noté L. Plus elle utilise de ce facteur de production L, plus elle produit. Plus précisément, la fonction de production est

$$q = \sqrt{L}$$

1) Dire quelle est la production de la firme quand $L = 1$, $L = 2$, $L = 3$. Qu'en déduisez-vous sur la nature de cette firme.

quand $L = 1$, $L = 2$, $L = 3$, la firme produit respectivement $q = 1$, $q = \sqrt{2} = 1,44$, $L = \sqrt{3} = 1,73$

Il en ressort que la production issue de l'usage d'un facteur supplémentaire décroit. Cette firme suit la loi des rendements décroissants.

2) Quels sont les paramètres de l'économie qu'il est nécessaire de connaître afin de calculer le choix optimal de la firme ?

Il est nécessaire de connaitre le prix du facteur travail ainsi que le prix de vente du bien.

3) Dans cet exemple, quelle est la définition et que vaut la productivité marginale du travail ? Est-il vrai que plus la firme est importante, plus la productivité marginale du travail est faible ?

La productivité marginale du travail est ce que produit la dernière unité de travail utilisée. Dans le cas où la quantité de travail est continue, cette productivité est exactement égale à la dérivée de la fonction de production, soit

$1/2\sqrt{L}$

C'est une fonction décroissante. Plus L est grand, moins l'adjonction d'une unité supplémentaire de travail produira de bien supplémentaire.

4) Quel est la loi que l'on devrait observer si la firme produit de manière optimale lorsqu'elle ne peut contrôler ni le prix du bien vendu p, ni le prix du travail w ?

Le profit étant $p\sqrt{L} - wL$ ce profit est maximum quand la dérivée est égale à zéro, soit quand

$$p/2\sqrt{L} - w = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1/2\sqrt{L} = w/p$$

car quand la productivité marginale égale le prix relatif du facteur de production.

4 Coordination de la production sur deux sites.

Un même propriétaire dispose de deux usines permettant de produire un bien en quantité q à partir d'un input que l'on note L. Les deux usines vendent leur production quelle qu'elle soit. Ces deux usines, 1 et 2, ont des procédés distincts, que l'on peut résumer par les deux fonctions de productions suivantes

$$q_1 = \sqrt{L_1} \qquad q_2 = 2\sqrt{2}(L_2)^{1/2}$$

1) Si le propriétaire de l'usine dispose exactement d'une quantité L d'input qu'il ne peut pas revendre si il ne les utilise pas, quelle est la part d'input qu'il utilise dans la première usine, quelle est la part d'input qu'il utilise dans la seconde usine. On notera les résultats $L_1(L)$ et $L_2(L)$. Ce résultat dépend-il du prix de vente du bien p ? Expliquer la réponse.

Il s'agit donc de comprendre combien le propriétaire de l'usine va répartir sa ressource de L unités d'input entre les deux usines. Déjà, il est immédiat qu'il va utiliser tout cet input puisqu'il les perd s'il ne les utilise pas. Aussi on a :

$$L_1 + L_2 = L$$

Son profit sera d'autant plus grand que ce qui sera produit sera grand. Le programme du propriétaire de l'usine est donc :

$$\begin{aligned} \max_{L_1,L_2} \quad & Q(L_1,L_2) = \sqrt{L_1} + 2\sqrt{2}(L_2)^{1/2} \\ s.c. \quad & L_1 + L_2 = L \end{aligned}$$

Le plus simple dans ce cas là est d'écrire la production Q en fonction simplement de L_1 (car quand on a choisi L_1, L_2 s'en déduit par l'équation $L_2 = L - L_1$; on a donc :

$$Q = \sqrt{L_1} + 2\sqrt{2}(L - L_1)^{1/2}$$

Le maximum de cette fonction est obtenu quand sa dérivée est nulle. Or

$$Q' = \frac{1}{2\sqrt{L_1}} - 2\sqrt{2} * \frac{1}{2}(L - L_1)^{-1/2}$$

cette dérivée est nulle quand

$$\frac{1}{2\sqrt{L_1}} - 2\sqrt{2} * \frac{1}{2}(L - L_1)^{-1/2} \Longleftrightarrow \frac{1}{L_1} = \frac{8}{(L - L_1)} \Longleftrightarrow L - L_1 = 8L_1 \Longleftrightarrow L_1 = \frac{1}{9}L$$

On en déduit que la production optimale est obtenue quand

$$\begin{cases} L_1 & = & \frac{1}{9}L \\ L_2 & = & \frac{8}{9}L \end{cases}$$

Remarque : Pour être plus correct, l'argument suivant devrait vérifier que la dérivée seconde de la fonction Q est négative. C'est immédiat ici :

$$Q'' = -\frac{1}{4\sqrt{L_1}} - 2\sqrt{2} * \frac{1}{4}(L - L_1)^{-3/2} < 0$$