

# Economie de l'Incertain

## CHAPITRE 1

Comportements individuels quand le risque est  
objectivement défini

# Plan

- 1 Représentations du risque**
- 2 Evaluations du risque**
- 3 Instruments de mesure de l'aversion pour le risque**

# 1

## **Représentations du risque**

- distributions discrètes et continues
- Statistiques sur les distributions

# Trois niveaux de risque

A la suite de Frank Knight, on peut distinguer trois degrés dans la connaissance imparfaite d'un agent soumis à l'alea :

1. l'incertain
2. le risque
3. l'expertise.

# L'incertitude

On dira un agent dans l'incertitude en l'absence de toute connaissance positive d'une distribution de l'alea. Il connaît les différents états de la nature, mais ne peut y associer de probabilité. A ce stade, les opportunités d'échange mutuellement avantageuses sont limitées et la rationalité qui les supporte, rudimentaire.

# Le risque

Au second degré, la connaissance d'une distribution permet à l'agent de se représenter le risque auquel il est soumis par des indicateurs comme la moyenne ou la variance d'un choc et d'établir des échelles de comparaison avec d'autres risques associés aux mêmes états de la nature. Ceci est le point de départ de la théorie de l'assurance.

# L'expertise

Enfin, il est possible que d'autres agents aient une connaissance plus fine du vrai état de la nature (mais possiblement imparfaite). C'est alors que le cadre économique peut intégrer, par un mécanisme d'échange élaboré, une réduction de cette asymétrie de l'information.

# Probabilités et distributions

- Cardan (1501-1576) : « le joueur savant ».
- Probabilité d'un événement =  $\frac{\# \text{ résultats favorables}}{\# \text{ événements possibles}}$ .
- « Pile » a une probabilité de  $1/2$ .  
Probabilité[obtenir un six au moins une fois en 3 lancers]  $\geq 1/2$ ? c'est  $= 1 - (5/6)^3 = 0.4213$  (de Méré).

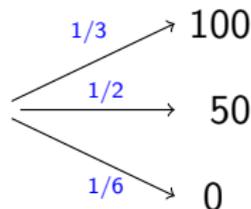
*Remarque* : On aurait pu penser que comme en un lancer, la probabilité de voir apparaître 6 est de  $1/6$ , en trois lancers, elle est trois fois plus grande (parce qu'on additionne la probabilité d'apparaître au premier tour, puis la probabilité d'apparaître au second tour et la proba d'apparaître au 3e tour. En fait, c'est méconnaître le fait que si 6 n'est pas apparu au premier tour, la probabilité qu'il apparaisse au second tour doit être déclassée du fait qu'il n'est pas apparu au premier tour. Puis que si le 6 n'est pas apparu au 1er et 2e tour, sa probabilité d'apparaître au troisième tour doit être déflatée du fait de ne pas être apparu au 1er et au 2e tour. En d'autres termes : La probabilité d'avoir 6 au moins une fois en trois lancers est :  $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} * \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 * \frac{1}{6} < \frac{1}{2}$ .

# Distributions du risque

## Distributions discrètes

Il y a un nombre fini d'évènements possibles  $i \in \mathcal{I}$ , chacun avec probabilité  $p_i$ . Cette association à chaque évènement de sa probabilité, c'est ce qu'on appelle la **distribution** des risque. Cette distribution satisfait toujours la contrainte

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} p_i = 1$$



## Distributions continues

Il y a un nombre infini, voire continu d'évènements possibles : chacun, pris isolément apparaît avec une probabilité nulle. La fonction de **repartition** décrit le poids relatif des évènements de faible gain par rapport aux évènements de gains plus élevés.

$$F(x) = \text{Prob}(X \leq x)$$

# Fonctions de répartition

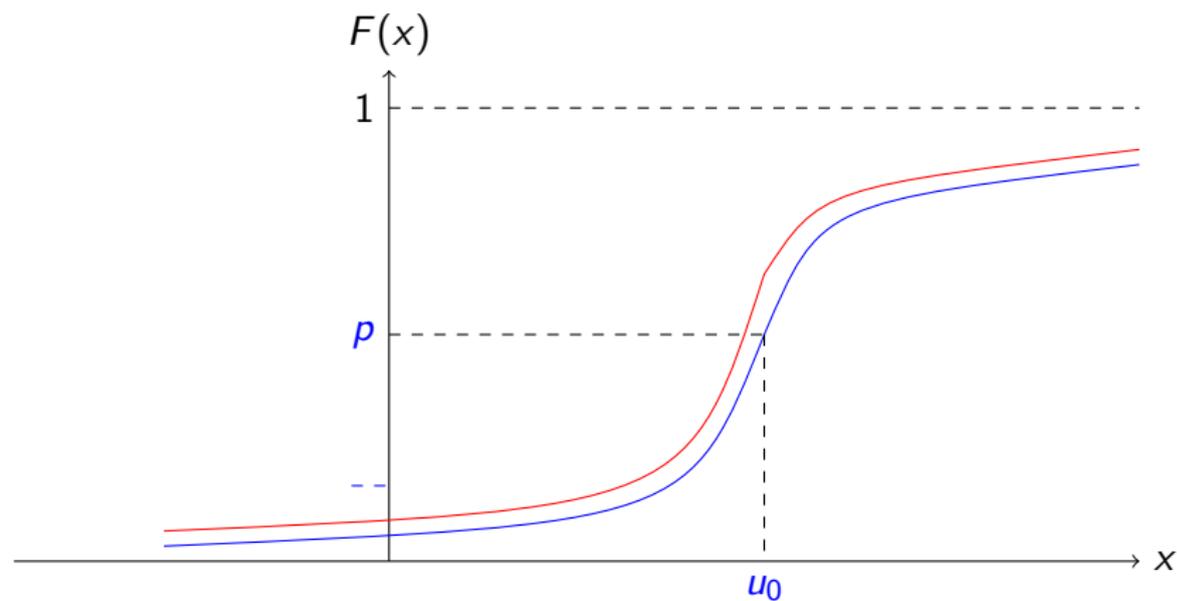
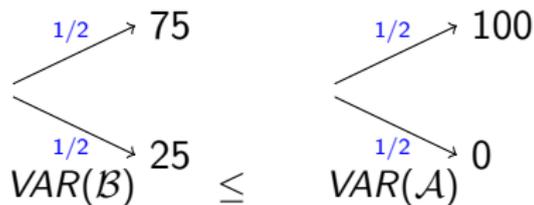


FIGURE : deux fonctions de répartition :  $F$  et  $G$

# Statistiques

- ▶ Moyenne  $\sum_i \text{probabilités} * \text{richesses}$   
dans l'exemple précédent, moyenne=50
- ▶ Variance une mesure de la distance à la moyenne.  
exemple : la distribution  $\mathcal{A}$  a une plus grande variance que la distribution  $\mathcal{B}$ .



- ▶ Modes représente le/les évènements avec la plus grande probabilité
- ▶ Fractiles Divise la population en classes égales, représentées par une richesse pivot.

# Statistiques - Pour aller plus loin

Il y a en fait deux familles de statistiques :

les *statistiques de position* dont l'objectif est de donner un ordre de grandeur des valeurs observées

les *statistiques de dispersion* qui évaluent le niveau d'étalement de la série autour de la valeur centrale.

Les paramètres de position (ou valeurs centrales) sont des valeurs numériques qui « résument » une série statistique en caractérisant l'ordre de grandeur des observations. Ils s'expriment dans la même unité que les observations. Les paramètres de position permettent de situer la position de plusieurs séries comparables. Lorsque la distribution est parfaitement symétrique, mode, moyenne et médiane sont confondues.

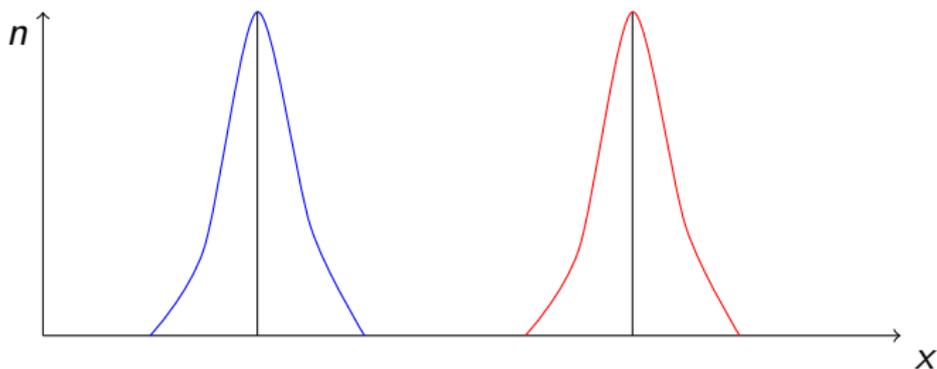


FIGURE : Les deux courbes ont la même allure, mais ne se positionnent pas du tout au même endroit sur l'axe des valeurs (des modalités). Les paramètres de position le mettent clairement en évidence.

# Moyenne arithmétique d'un ensemble de $N$ nombres

## Définition

La moyenne arithmétique de  $N$  nombres est égale à la somme de ces nombres divisée par leur nombre.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i$$

## Exemple simple

3 individus, gagnent respectivement 10.000 euros, 20.000 euros et 30.000 euros. La moyenne de leur revenu est 20.000 euros.

## Remarque

La moyenne arithmétique est exactement la quantité qui pourrait être identiquement distribuée à chaque individu. En effet, la conséquence directe de la définition de  $\bar{x}$  est :  $N \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i$ .

## Moyenne arithmétique d'une distribution

Dans le cas d'une distribution, il faut prendre en compte la fréquence d'apparition de chacune des réalisations.

### **Cas discret : à partir du tableau de fréquences**

Une variable  $X$  prend les valeurs  $x_i$  avec la fréquence  $f_i$  pour  $i = 1, \dots, N$ . La moyenne de cette variable est

$$\bar{X} = \sum_i f_i x_i$$

- ▶ la comparaison avec la formule du transparent précédent est immédiate.  $\frac{1}{N}$  est remplacé par la fréquence (individualisée) de chaque réalisation  $f_i$ .

### **Cas continu : à partir de la fonction de distribution**

Un variable  $X$  est définie par sa fonction de distribution  $f(x)$ , sa moyenne est

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

## Distribution représentée comme un bruit blanc autour d'une moyenne

Quand il n'y a pas trop de dispersion autour de la moyenne, il est assez naturel de représenter une distribution comme étant une valeur certaine autour de laquelle il y a un bruit blanc.

**Définition** Un bruit *blanc* est une variable aléatoire  $\tilde{\epsilon}$  dont la moyenne est nulle ( $E(\tilde{\epsilon}) = 0$ ) dont les réalisations sont faibles en regard de la valeur (de position)  $x$ .

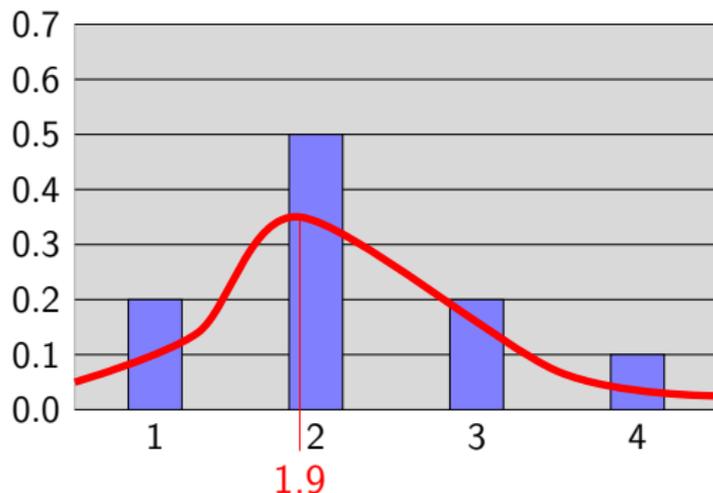
**Exemple** Soit la variable aléatoire  $\mathcal{A}$  suivante, on peut la représenter comme la somme de sa moyenne et du bruit blanc  $\tilde{\epsilon} = \mathcal{A} - E[\mathcal{A}]$  :

$$\begin{array}{l} \begin{array}{l} \xrightarrow{1/2} 50,3 \\ \mathcal{A} \\ \xrightarrow{1/2} 50,1 \end{array} = 50,2 + \begin{array}{l} \xrightarrow{1/2} 0,1 \\ \tilde{\epsilon} \\ \xrightarrow{1/2} -0,1 \end{array} \end{array}$$

Tout se passe comme si un agent qui était exposé au risque représenté par  $\mathcal{A}$  recevait la valeur sûre 50,2, dans un premier temps, cad la moyenne, et qu'avec égale probabilité, il perde (ou il gagne) à partir de cette valeur sûre -0,1 (ou +0,1).

## Le mode, défini pour toute variable aléatoire

Le mode d'une variable qualitative ou quantitative discrète :  
modalité dont la fréquence (absolue ou relative) est la plus élevée.  
Dans le cas où une variable continue a été regroupée en classes, le mode est la classe dont la fréquence est la plus élevée.

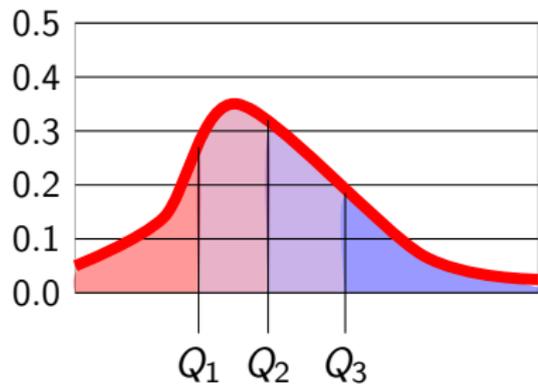


Dans l'exemple ci-dessus, le mode de la variable discrète est 2, celui de la variable continue, 1.9.

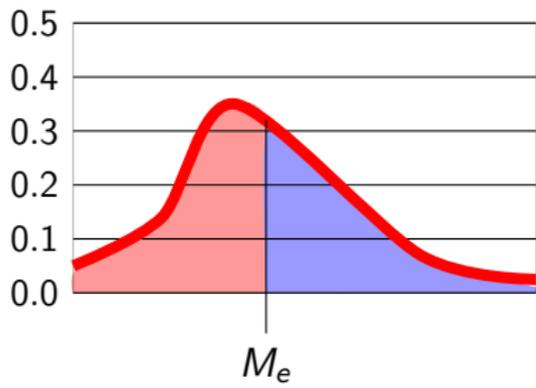
## Les quantiles : séparer une distribution en parts égales

Lorsque la variable est ordonnée, si elle est continue, et parfois même quand elle est discrète ordonnée, on cherche à représenter les différentes parties d'une distribution. On nomme *quantiles* les valeurs qui permettent de séparer la distribution en parts égales. L'opération varie avec le nombre de parts.

Dans le cas d'une séparation en quatre, les *quartiles* sont les valeurs qui partagent la distribution en 4 parties de 25%.



Dans le cas d'une séparation en deux, la *médiane* est la valeur qui partage la distribution en 2.



# Le quantile, défini pour les variable ordonnées

## Definition

les quantiles sont les valeurs de la variable partageant la série classée par ordre croissant de la variable en  $k$  sous-ensembles égaux.

- ▶  $k = 2$  c'est la *médiane*  $M_e$
- ▶  $k = 4$  c'est les *quartiles*  $Q_1, Q_2, Q_3$
- ▶  $k = 10$  c'est les *deciles*  $D_1, D_2, \dots, D_9$
- ▶  $k = 100$  c'est les *centiles*  $C_1, C_2, \dots, C_{99}$

## Calcul du $n^{\text{ième}}$ quantile ( $n < k$ )

- ▶ Classer les données en ordre croissant, et calculer les fréquences cumulées  $F(x)$
- ▶ Si  $\exists x_i / F(x_i) = n/k$  : le  $n^{\text{ième}}$  quantile est  $x_i$ .
- ▶ Si  $\exists x_{i-1}, x_i / F(x_{i-1}) < n/k < F(x_i)$  : le  $n^{\text{ième}}$  quantile est  $x_i$ . On peut parfois considérer l'intervalle  $]x_{i-1}, x_i]$  ou en faire la moyenne de  $x_{i-1}, x_i$  (dans le cas de la médiane, on parle d'intervalle médian).

# Exemple



Modalité	Effectifs	Fréquences	Fréq. cumulées	Qi
2	1	0.1	0.1	
3	3	0.3	0.4	0.25
4	4	0.4	0.8	0.5 ; 0.75
6	2	0.2	1	
Total	10	1		

Dans la pratique, il faut trouver les modalités dont la fréquence cumulée est “juste au-dessus” de 0.25, 0.5, 0.75



Prouver dans l'exemple suivant que le nombre d'enfants median est 2

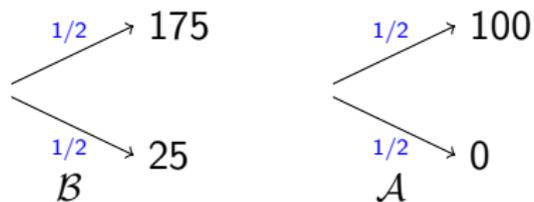
nb enfants	0	1	2	3	+ de 3
Effectifs	2	1	4	2	1

2

**Evaluations du risque**

## Comparaisons - FSD

Certaines comparaisons admises par tous sont *robustes*. Ainsi, on préférera la loterie  $\mathcal{B}$  à la loterie  $\mathcal{A}$  si l'utilité des agents est croissante avec la richesse dans chaque état de la nature.



**Définition :** On dira qu'une distribution domine une autre distribution suivant le critère de *dominance stochastique de premier ordre* si cette distribution rémunère plus tous les états de la nature.

*cependant*, ce critère est loin de permettre de classer toutes les loteries. Ainsi, il sera impossible d'établir suivant ce critère un ordre de préférence entre la loterie  $\mathcal{B}$  et le revenu certain de 50.

# Recherche d'un Critère de préférence

Pour comprendre le comportement d'un agent, et plus précisément les choix qu'il fait lorsqu'il doit choisir entre plusieurs loteries  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , on essaye d'établir un *critère de notation* des différentes loteries.

**Selon quels types de critères les agents économiques classent-ils les loteries ?**

# Critère Moyenne - Variance

- Critère lexicographique
- Une plus grande espérance de revenu satisfait l'agent
- Une moins grande variance de revenu satisfait l'agent

$$U(\tilde{X}) = E(\tilde{X}) - \frac{\beta}{\alpha} V(\tilde{X})$$

# Espérance d'utilité

## Définition

Plutôt que de prendre l'espérance de la lotterie, tout se passe comme si l'agent appréciait les différents revenus à travers un filtre. Ainsi, l'agent voit le revenu  $x$  à travers son utilité ressentie  $u(x)$ . *Son critère d'évaluation est l'espérance de ces utilités.*

$$U \left( \begin{array}{l} \xrightarrow{1/3} x \\ \xrightarrow{1/2} y \\ \xrightarrow{1/6} z \end{array} \right) = \frac{1}{3} u(x) + \frac{1}{2} u(y) + \frac{1}{6} u(z)$$

## (EU suite) Utilité marginale décroissante pour la richesse

En général, on estime que la fonction  $u(x)$  Von Neumann Morgenstern est concave.

Cette fonction d'utilité VNM permet de représenter ce que l'on observe souvent à travers les choix des agents, à savoir *l'utilité marginale décroissante pour la richesse*

$x$	$u(x) = \sqrt{x}$	$u(x) = \ln(x)$
100	10	2,30
1000	31,63	4,60
10.000	100	6,91
100.000	316,23	9,21
$10^6$	1000	11,51

Un accroissement de richesse génère un accroissement d'utilité qui est en relation inverse de la richesse déjà accumulée.

# Equivalent Certain

**Définition :** On appelle équivalent certain d'une loterie, la somme d'argent détenue de manière certaine qui donne la même utilité que la loterie

Il est à noter que ce l'équivalent certain définit un critère universel de classement des loteries. Mais là encore, connaître l'équivalent certain donne moins d'information que la connaissance de la distribution elle-même.

## 2 remarques :

- L'équivalent certain d'une loterie peut-être calculé quand on connaît la forme des préférences d'un individu.
- Les paramètres des préférences d'un individu donné peuvent êtres calculés quand on connaît l'équivalent certain de quelques loteries pour cet individu.

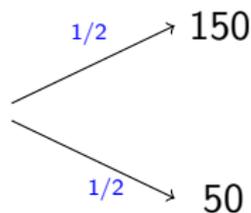
## Prime pour le risque

Cette fonction d'utilité VNM permet de mesurer ce que l'agent est prêt à payer pour échapper au risque. Ce que l'on appelle la *prime de risque*, c'est à dire la différence entre le gain espéré, et l'équivalent certain (ou monétaire) de la lotterie.

$$\pi = E(L) - EC$$

### Exemple

Supposons que la VNM d'un agent soit  $u(x) = \ln(x)$  et que cet agent soit exposé à la lotterie



- ▶ Sa richesse espérée est 100
- ▶ Son utilité est  $\frac{1}{2} \ln(150) + \frac{1}{2} \ln(50) = 4,661$
- ▶ Or  $4,661 = \ln(76,6)$
- ▶ Sa prime de risque est donc  $100 - 76,6 = 13,4$ .

## Que se passe t'il quand le risque est petit ?

Que signifie un petit risque ou plus communément *valeur connue à quelque perturbation près*? Il s'agit de situations où une variable future n'a pas une réalisation  $x$  connue de manière sûre, mais une valeur  $x + \tilde{\varepsilon}$  où  $\tilde{\varepsilon}$  est une petite perturbation autour de  $x$ . En toute logique, on représente cette situation avec  $\tilde{\varepsilon}$  dont la moyenne est nulle et où les réalisations de  $\tilde{\varepsilon}$  sont petites.

**Définition** Un bruit *blanc* est une variable aléatoire  $\tilde{\varepsilon}$  dont la moyenne est nulle ( $E(\tilde{\varepsilon}) = 0$ ) et dont les réalisations sont faibles en regard de la valeur (de position)  $x$ .

## Prime pour le risque quand le risque est petit

Il est possible de faire une approximation de la prime pour le risque quand le risque est petit.

**Proposition** La prime de risque associé à un bruit blanc  $\tilde{\varepsilon}$  de variance  $\sigma^2$ , lorsque la valeur principale (ou moyenne) est  $x$  peut être approximée par  $\eta = \frac{1}{2}A(x)\sigma^2$ , où  $A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$  désigne le coefficient d'aversion absolue pour le risque.

- ▶ Remarquer que selon cette formule le calcul de la prime de risque est simple : la prime est linéaire avec la variance du risque
- ▶ Remarquer que plus  $A(x)$  est grand, plus la prime de risque est élevée
- ▶ Remarquer enfin que  $A(x)$  dépend de la dérivée seconde de la VNM, cad de la courbure de la VNM : plus la fonction est concave, (plus elle aplatit les haut revenus), plus la prime de risque est élevée

## Approximation de la prime de risque quand le risque est petit (PREUVE de la proposition précédente)

Nous allons faire des approximations de l'utilité d'un agent exposé au risque "autour de  $x$ "

(1) ► Si  $\eta$  est la prime de risque :  $u(x - \eta) \approx u(x) - \eta u'(x)$

(2) ► Pour toute réalisation de  $\varepsilon$  :  $u(x + \varepsilon) \approx u(x) + \varepsilon u'(x) - \frac{1}{2}(\varepsilon)^2 u''(x)$

(3) ► En moyenne donc :  $E[u(x + \varepsilon)] \approx u(x) + E[\varepsilon]u'(x) - \frac{1}{2}E[(\varepsilon)^2]u''(x) = u(x) - \frac{1}{2}\sigma^2 u''(x)$

et donc, si on égalise l'équation (1) et l'équation (3) on trouve :

(4) ► 
$$\eta = \frac{1}{2} \frac{-u''(x)}{u'(x)} \sigma^2$$

## Degré d'aversion au risque

Vous disposez d'une richesse de 100 et faites face au risque de gagner ou perdre 50 avec égale probabilité. Soit  $\pi$  ce que vous êtes prêt à payer pour échapper au risque.

Degré d'AR	$\pi$
0	00.0
1	13.4
4	37.8
10	46.0

Décrire les positions risquées que vous avez si vous contractez une assurance au prix de la prime de risque.

## Coefficient d'aversion absolue pour le risque

Comme il a été défini plus haut, l'AVERSION ABSOLUE POUR LE RISQUE au sens de ARROW-PRATT est un coefficient qui dépend de l'ordre de grandeur du risque que l'on subit. Il se définit comme :

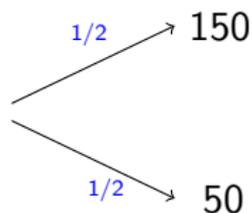
$$A(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)}$$

- ▶ Remarquer que ce coefficient est POSITIF quand la fonction  $u(\cdot)$  est concave
- ▶ Remarquer que ce coefficient varie avec  $x$  : cela signifie que quand la richesse varie, le comportement face au risque varie.
- ▶ Dans les exemples standards, on verra que  $A(x)$  est décroissante avec  $x$  : plus les agents sont riches, moins ils sont averses au risque.

# Aversion décroissante avec la richesse

## Exemple

Supposons que la VNM d'un agent soit  $u(x) = \ln(x)$  et que cet agent soit exposé à la lotterie



Comment votre prime de risque évolue si votre richesse initiale est de 1000 ?

Comment votre prime de risque liée au risque de gagner ou perdre 50 avec égales probabilités évolue si votre richesse passe de 100 à 1000 ?

Il est communément accepté que celle-ci décroît.