Dossier 5 : Fonctions exponentielles, logarithme et suites numériques

5 - 1 Objectifs

- Résoudre des équations avec exponentielles et logarithmes de base a quelconque ($a > 0$) ;
- Calculer des intérêts composés ;
- Étudier des suites numériques définies de manière explicite ou par récurrence d'ordre 1 : monotonie, majoration, minoration, limite.

5 - 2 Rappels

5 - 2.1 Fonctions exponentielles

Une fonction exponentielle de base a est une fonction $f : x \mapsto y$ définie par

$$y = a^x \qquad a > 0 \qquad \text{et} \qquad a \neq 1$$

dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $\mathbb{R}_+^*$, qui est croissante pour $a > 1$, décroissante pour $0 < a < 1$ et on a $y = 1$ pour $x = 0$. C'est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

5 - 2.2 Fonctions logarithmes

La réciproque d'une fonction exponentielle de base a avec $a > 0$ et $a \neq 1$, est la fonction logarithme de base a, notée

$$y = \log_a x \qquad a > 0 \qquad \text{et} \qquad a \neq 1$$

définie par $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$. Le nombre $\log_a x$ est la puissance à laquelle il faut élever la base a pour obtenir x. Son domaine de définition est $\mathbb{R}_+^*$, son ensemble image est $\mathbb{R}$. Si $a > 1$, la fonction logarithme est croissante. Elle est décroissante pour $0 < a < 1$. En $x = 1$ on a $y = 0$.

5 - 2.3 Propriétés des fonctions exponentielles et logarithmes

Pour tout $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$
3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$
5. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
6. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

et pour tout a, x et $y \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$:

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^n = n \log_a x$ avec $n \in \mathbb{R}$
4. $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$ avec $n \in \mathbb{R}^*$

5 - 2.4 Exponentielle naturelle et logarithme naturel

On définit le nombre d'Euler par

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828.$$

La fonction exponentielle de base e est la appelée *fonction exponentielle naturelle* : $y = e^x$. La fonction logarithme de base e est appelée *logarithme naturel* ou *logarithme népérien*, notée $y = \ln x = \log_e x$. Étant réciproques l'une de l'autre, on a $e^{\ln x} = x$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln e^x = x$, $x \in \mathbb{R}$.

5 - 2.5 Changement de base

Pour passer d'une base a quelconque ($a > 0, a \neq 1$) à la base e, on utilise les deux identités suivantes :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad\qquad a^x = e^{x \ln a}$$

5 - 2.6 Suites numériques

Une suite (u_n) est une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On note son terme général par u_n, appelé le *terme de rang n*. Il existe plusieurs façons de définir une suite dont les deux suivantes :

— Définition explicite : $u_n = f(n)$ avec $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$;

— Définition par récurrence d'ordre 1 : u_0 donné et $u_{n+1} = g(u_n)$, avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Monotonie : Une suite (u_n) est **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n \geq 0$; elle est **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n \leq 0$. De manière similaire et si la suite est toujours positive ($\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 0$), la suite est croissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$; décroissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
Bornes : Une suite (u_n) est **majorée** si $\exists A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n < A$; **minorée** si $\exists B \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : B < u_n$. La suite est **bornée** si $\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : |u_n| < C$.
Convergence : Une suite (u_n) est **convergente** s'il existe un réel ℓ tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Intuitivement, les valeurs u_n prises par la suite deviennent aussi proche que l'on souhaite de la limite ℓ, pourvu que l'on considère des termes de rang n suffisamment élevé. Sinon, la suite est divergente : soit $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; soit $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$; soit la suite ne converge vers aucune valeur particulière.
Théorème fondamental sur les suites : Toute suite croissante (décroissante) et majorée (minorée) est convergente et sa limite est sa borne supérieure (inférieure).
Théorème sur les suites convergentes : Toute suite convergente est bornée. L'inverse n'est pas vrai : tout suite bornée n'est pas nécessairement convergente. Corolaire : toute suite non bornée n'est pas convergente.
Opérations sur les suites : Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Alors :

— la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell_1 + \ell_2$;

— la suite $(k \cdot u_n)$ converge vers $k \cdot \ell_1$, avec k une constante ;

— la suite $(u_n \cdot v_n)$ converge vers $\ell_1 \cdot \ell_2$;

— la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ pourvu que $\forall n : v_n \neq 0$ et $\ell_2 \neq 0$.

Théorème des gendarmes : Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de même limite ℓ. S'il existe une suite (w_n) telle que $\forall n : u_n \leq w_n \leq v_n$, alors $\lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$.
Suites adjacentes : Si (u_n) est une suite croissante, (v_n) une suite décroissante et que $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$, alors (u_n) et (v_n) sont deux suites *adjacentes*. **Théorème** : Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.
Théorème du point fixe : Lorsqu'une suite (u_n) définie par récurrence d'ordre 1 telle que u_0 donné et $u_{n+1} = g(u_n)$ avec g une fonction continue est convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors la limite ℓ est un point fixe de la fonction $g : \ell = g(\ell)$.
Trois familles de suites particulières :

1. Les suites **arithmétiques** : pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$. Elles sont divergentes lorsque $r \neq 0$ et $\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$.
2. Les suites **géométriques** : pour tout n, $u_{n+1} = qu_n$. Elles sont divergentes si $|q| > 1$ ou $q = -1$ et convergentes si $|q| < 1$ ou $q = 1$. Lorsque $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} u_n = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
3. Les suites **arithmético-géométriques** : pour tout n, $u_{n+1} = qu_n + r$. Leur étude se ramène à l'étude d'une suite géométrique (v_n) telle que $v_n = u_n - \ell$ avec $\ell = q \cdot \ell + r$.